

## 10. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

### Aufgabe 29:

Betrachten Sie den Impulsoperator  $p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$  und den Operator  $q_k$  gegeben durch  $(q_k \psi)(x) = x_k \psi(x)$ . Zeigen Sie:

(a) Für die Fourier-Transformierte gilt  $\widehat{p_k \psi}(\xi) = \xi_k \widehat{\psi}(\xi)$  für  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

(b)  $\langle p_k \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \xi_k |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$

(c)  $\|p_k \psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \xi_k^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$

(d)  $i[p_k, q_k] \psi = \psi$

### Aufgabe 30:

Betrachten Sie die komplexe Gauß-Funktion

$$\psi(x) = \exp(-a|x - \bar{q}|^2 + i\bar{p}(x - \bar{q}) + c), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit komplexen Parametern  $a$  ( $\operatorname{Re} a > 0$ ) und  $c$  ( $\operatorname{Re} c$  so, dass  $\|\psi\|_{L^2} = 1$ ) und mit reellen Parametervektoren  $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie (wenn Sie wollen nur für  $n = 1$ ):

(a) Die Fourier-Transformierte  $\widehat{\psi}(\xi)$  ist wiederum eine komplexe Gauß-Funktion. Welche?

(b)  $\langle q_k \rangle_\psi = \bar{q}_k, \quad \langle p_k \rangle_\psi = \bar{p}_k \quad (k = 1, \dots, n)$ .

(c) Für reelles  $a$  gilt Gleichheit in der Unschärferelation:  $\Delta p_k \Delta q_k = \frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 31:

Zeigen Sie: Sind die Anfangsdaten der freien Schrödinger-Gleichung  $i\partial\psi/\partial t = -\frac{1}{2m}\Delta\psi$  eine komplexe Gauß-Funktion (wie in der vorherigen Aufgabe), so bleibt die Lösung zu allen Zeiten eine komplexe Gauß-Funktion mit  $\bar{p}(t) = \bar{p}(0), \bar{q}(t) = \bar{q}(0) + t\bar{p}(0)/m$  (d.h., Erwartungswerte von Ort und Impuls gemäß Newton).

Hinweis: Setzen Sie  $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$  wie angegeben an, und bestimmen Sie dann  $a$  und  $c$  aus gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Sie aus der Schrödinger-Gleichung herleiten.