

9. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 29:

- (a) Zeigen Sie für lineare Interpolation in den Ecken des Referenzdreiecks \hat{K}

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_0 \leq C |v|_2 \quad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K}) .$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$v(x) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} v(tx) dt = Dv(x)x - \int_0^1 t \frac{d^2}{dt^2} v(tx) dt$$

und dieselbe Formel für $\hat{\Pi}v$.

- (b) Zeigen Sie mittels (a) für die lineare Interpolation in den Ecken eines beliebigen Dreiecks K mit Durchmesser h

$$\|v - \Pi v\|_0 \leq C h^2 |v|_2 \quad \text{für alle } v \in H^2(K) ,$$

wobei C nicht von K abhängt.

Aufgabe 30:

- (a) Zeigen Sie für bilineare Interpolation in den Ecken des Einheitsquadrats \hat{K}

$$|v - \hat{\Pi}v|_1 \leq C |v|_2 \quad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K}) .$$

- (b) Schließen Sie daraus für den Interpolationsfehler eines aus \hat{K} affin erzeugten finiten Elements K mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ :

$$|v - \Pi v|_1 \leq C \frac{h^2}{\rho} |v|_2 \quad \text{für alle } v \in H^2(K) ,$$

wobei C nicht von K abhängt.

Aufgabe 31:

Das elliptische Variationsproblem $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$ mit $V \subset H^1(\Omega)$ werde durch ein Galerkin-Verfahren mit Approximationsraum $V_h \leq V$, einer angenäherten Linearform $l_h : V_h \rightarrow \mathbb{R}$ und einer angenäherten Bilinearform $a_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ approximiert:

$$\text{Bestimme } u_h \in V_h \text{ mit } a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h .$$

Dabei seien die Bilinearformen a_h gleichgradig elliptisch, dass heisst mit einer von h unabhängigen Zahl $\alpha > 0$ gelte

$$\alpha \|w_h\|_1^2 \leq a_h(w_h, w_h) \quad \forall w_h \in V_h .$$

Zeigen Sie für den Fehler (*Lemma von Strang*):

$$\|u - u_h\|_1 \leq c \left(\inf_{v_h \in V_h} (\|u - v_h\|_1 + \|a(v_h, \cdot) - a_h(v_h, \cdot)\|_*) + \|l - l_h\|_* \right) ,$$

wobei die Operatornorm $\|\cdot\|_*$ als $\|F\|_* = \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{|F(w_h)|}{\|w_h\|_1}$ definiert ist.

Hinweis: Fangen Sie mit der gleichgradigen Elliptizität von a_h für $w_h = u_h - v_h$ an.

Besprechung in den Übungen am 19.12.2011