

7. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 21: Man definiert: $u \in L^2(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ (für $i = 1, \dots, n$), falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\phi, \partial_i u)_0 = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, u\right)_0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1 -Gebiete Ω :

- (a) Für $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u / \partial x_i$ eine schwache Ableitung.
- (b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen (im Sinne der Vorlesung) schwache Ableitungen.

Es gilt (ohne, dass Sie es zeigen müssen): Falls die schwachen Ableitungen von $u \in L^2(\Omega)$ existieren, so sind sie verallgemeinerte Ableitungen und daher auch $u \in H^1(\Omega)$.

Aufgabe 22: Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u , die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben.

Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \iff u \in C(\bar{\Omega})$$

Hinweis: $u \in H^1(\Omega) \iff u \in L^2(\Omega)$ und u besitzt schwache Ableitungen (vgl. Aufg. 21).

Aufgabe 23:

- (a) Geben Sie eine stetige Funktion auf $[0,1]$ an, die nicht in $H^1(0,1)$ enthalten ist.
- (b) Sei Ω eine Kugel im \mathbb{R}^3 mit Zentrum im Ursprung. Zeigen Sie: Für $\alpha < 1/2$ ist durch $u(x) = \|x\|^{-\alpha}$ eine Funktion in $H^1(\Omega)$ gegeben.

Aufgabe 24:

Seien V, W normierte Vektorräume und $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$L \text{ stetig} \iff L \text{ stetig in } 0 \iff L \text{ beschränkt.}$$

Programmieraufgabe 3 :

Lösen Sie näherungsweise das Problem $-\Delta u = 1$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$ auf dem Dreieck

$$\Omega = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

mit der finite Elemente-Methode, z.B. von Hand mit rechtwinkligen Dreiecken der Kathetenlänge $h = 1/16$ oder durch Verwendung des Buttons “=” der Matlab PDE-Toolbox.

Besprechung in den Übungen am 28.11.2011