Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 31.10.2011

4. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 10: Helfen Sie Leibniz und Bernoulli: Leiten Sie (anachronistisch) die Kettenlinie durch Minimierung der potentiellen Energie her. Was genau ist zu minimieren? Wie lauten die Euler'schen Gleichungen? Weisen Sie nach, dass die in §1 der Vorlesung angegebene Lösung mit der cosh-Funktion eine Lösung der Euler'schen Gleichungen liefert.

Aufgabe 11: Approximiert man im Variationsproblem

$$(\star) \qquad \int_a^b f(t,y,y')dt = \min!$$

das Integral durch die Trapezsumme und die Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten, so erhält man das Minimierungsproblem

$$\frac{h}{2} f\Big(a, y(a), \frac{y(a+h)-y(a)}{h}\Big) + h\sum_{i=1}^{n-1} f\Big(t_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\Big) + \frac{h}{2} f\Big(b, y(b), \frac{y(b)-y(b-h)}{h}\Big) = \min!$$

Zeigen Sie, dass bei gegebenen Randwerten die Lösung dieses Problems genau der Anwendung der Mittelpunktsregel auf die Euler'schen Differentialgleichungen

$$y' = z, \quad w' = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y,z), \quad 0 = w - \frac{\partial f}{\partial y'}(t,y,z)$$

entspricht.

Hinweis: Bei der Mittelpunktsregel wird die Ableitung y' durch einen Differenzenquotienten der Form

$$y'(t_i) \to \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

ersetzt (für w' analog).

Aufgabe 12: Zeigen Sie, dass entlang der Lösung eines Variationsproblems $(\star)$ gilt, dass $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y')^2}$ eine positiv semidefinite Matrix ist.

Hinweis: Setzen Sie $\delta y(t) = vh(t)$ mit h wie im Fundamentallemma.

Aufgabe 13: Zeigen Sie: Ist bei einem Variationsproblem $(\star)$ die Randbedingung an der Stelle b nicht vorgegeben, so muss die "natürliche" Randbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$$

gelten, um das Problem lösbar zu machen.

Besprechung in den Übungen am 07.11.2011