Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 17.10.2011

# 2. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

## Aufgabe 4:

Wie sieht das Runge-Kutta-Verfahren aus, das zum Kollokationsverfahren mit einem Knoten $c_1 = 1/2$ äquivalent ist?

## Aufgabe 5:

Betrachten Sie das lineare Randwertproblem

$$y' = C(t)y, \qquad Ay(a) + By(b) = r.$$

Wenn Sie auf dieses Randwertproblem das Kollokationsverfahren aus Aufgabe 4 als Mehrzielmethode anwenden, so erhalten Sie ein lineares Gleichungssystem. Geben Sie dieses an.

## Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass für die Lösung der Mehrzielgleichungen gilt:

$$\Delta x_j = \sum_{l=0}^{m-1} G_{jl} F_l - E_{m-j}^{-1} F_m$$

mit

$$E_{m-j} := A R_0^{-1} \cdots R_{j-1}^{-1} + B R_{m-1} \cdots R_j$$

und

$$G_{jl} = \begin{cases} E_{m-j}^{-1} A R_0^{-1} \cdots R_l^{-1} & l < j, \\ -E_{m-j}^{-1} B R_{m-1} \cdots R_{l+1} & l \geq j, \end{cases}$$

wobei wir leere Produkte als $I$ auffassen.

Bemerkung: Die Matrix $(G_{jl})$ kann als diskretes Analogon der Green'schen Funktion aus Aufgabe 2 aufgefasst werden.

## Programmieraufgabe 1 :

Der Flüssigkeitsstand $y(r)$ in einer zylinderförmigen Kapillare erfüllt die Randwertaufgabe

$$y'' = \Big(1 + (y')^2\Big)^{3/2} (By + 2\kappa) - \tfrac{1}{r}\Big((y')^3 + y'\Big), \quad 0 < r < 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = \cot\theta.$$

Hierbei ist $\kappa$ die unbekannte Krümmung in der Zylindermitte ($r = 0$), $\theta$ ist der gegebene Kontaktwinkel am Rand ($r = 1$). Die Bond-Zahl $B$ ist ein gegebener Parameter.

Lösen Sie (wie auch immer) das Randwertproblem für $B = 1$ und $\theta = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$. Beachten Sie dabei $y''(0) = \kappa$ (warum?).

**Besprechung in den Übungen am 24.10.2011**
Die Übungen finden jeweils montags von 14-16 Uhr (s.t.) in N16 und von 16-18 Uhr in N15 statt.
Bearbeitungszeit für die Programmieraufgabe: 3 Wochen