Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 23.01.2012

12. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 40:

Ein Sattelpunkt einer Funktion $L : X \times M \to \mathbb{R}$ ist ein Punkt $(u, p) \in X \times M$ mit

$$\sup_{q \in M} L(u, q) = L(u, p) = \inf_{v \in X} L(v, p).$$

Bezüglich welcher Funktion L ist die Lösung eines „Sattelpunktproblems" wie in der Vorlesung

$$(S) \qquad \begin{array}{lcll} a(u,v) + b(v,p) & = & f(v) & \forall v \in X \\ b(u,q) & = & g(q) & \forall q \in M \end{array}$$

ein Sattelpunkt?

Aufgabe 41:

Die Poissongleichung $-\Delta u = -\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kann man formal als System schreiben

$$\begin{array}{rcl} \sigma + \operatorname{grad} u & = & 0 \\ \operatorname{div} \sigma & = & f. \end{array}$$

(a) Geben Sie die zugehörige Formulierung des homogenen Dirichlet-Problems als Sattelpunktproblem (S) in $X \times M = L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Brezzi-Bedingungen in $X \times M$ erfüllt sind.

(c) Zu einer Triangulierung sei X_h der Raum der stückweise konstanten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^d$, und M_h der Raum der stetigen stückweise linearen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Brezzi-Bedingungen gleichmäßig in h erfüllt sind.
Hinweis: $\operatorname{grad} M_h \subset X_h$

Aufgabe 42:

Betrachtet werde das Neumann-Problem zur Poissongleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega\,, \quad \partial u / \partial n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

(a) Zeigen Sie mit dem Gauß'schen Integralsatz, dass das Problem nur lösbar ist, falls $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

(b) Da mit u auch $u + \text{const.}$ eine Lösung ist, kann man die Nebenbedingung

$$\int_\Omega u dx = 0$$

fordern. Formulieren Sie das zugehörige Sattelpunktproblem in $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Brezzi-Bedingungen erfüllt sind.
Hinweis: Sie wissen (zumindest für konvexes Ω), dass

$$\|v - Mv\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \cdot |v|_{1,\Omega}.$$

(d) Diskutieren Sie ein (gemischtes) Finite-Element-Verfahren für dieses Sattelpunktproblem.

Aufgabe 43:

Für die Unterräume X_h, M_h sei bekannt, dass sie die Brezzi-Bedingungen erfüllen. Es werde nun X_h oder M_h vergrößert oder verkleinert. Welche der Bedingungen müssen jeweils neu geprüft werden?

Besprechung in den Übungen am 30.01.2012