

13. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 44:

Sei $A = M - N$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix A , und es sei auch N symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass die Iteration

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

konvergiert und dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix reell sind und zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 45:

A und C seien symmetrisch positiv definite Matrizen.

Zeigen Sie: Falls $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar ist, so auch $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}$.

Aufgabe 46:

A sei symmetrisch positiv definit, und $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$ sei invertierbar.

(a) Zeigen Sie, dass $A + tB^TB$ für jedes $t > 0$ positiv definit ist.

(b) Die Lösung des Minimierungsproblems

$$(P_t) \quad \frac{1}{2}u^T(A + tB^TB)u - u^Tf = \min!$$

unter der Nebenbedingung $Bu = 0$ hängt nicht von t ab. Die Nebenbedingung werde nun ignoriert, und andererseits werde $\lambda = tBu$ als neue Variable eingeführt. Zeigen Sie, dass ein Problem mit einer Matrix wie in der vorigen Aufgabe entsteht.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung von (P_t) für $t \rightarrow +\infty$ (ohne Nebenbedingung) gegen die Lösung von P_0 mit Nebenbedingung $Bu = 0$ konvergiert.