

11. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 37: Ein Sattelpunkt einer Funktion $L : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Punkt $(u, p) \in X \times M$ mit

$$\sup_{q \in M} L(u, q) = L(u, p) = \inf_{v \in X} L(v, p).$$

Bezüglich welcher Funktion L ist die Lösung eines „Sattelpunktproblems“ wie in der Vorlesung

$$(S) \quad \begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= f(v) & \forall v \in X \\ b(u, q) &= g(q) & \forall q \in M \end{aligned}$$

ein Sattelpunkt?

Aufgabe 38: Die Poissongleichung $-\Delta u = -\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kann man formal als System schreiben

$$\begin{aligned} \sigma + \operatorname{grad} u &= 0 \\ \operatorname{div} \sigma &= f. \end{aligned}$$

- Geben Sie die zugehörige Formulierung des homogenen Dirichlet-Problems als Sattelpunktproblem (S) in $X \times M = L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ an.
- Zeigen Sie, dass die Brezzi-Bedingungen in $X \times M$ erfüllt sind.
- Zu einer Triangulierung sei X_h der Raum der stückweise konstanten Funktionen mit Werten in \mathbb{R}^d , und M_h der Raum der stetigen stückweise linearen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Brezzi-Bedingungen gleichmäßig in h erfüllt sind.
Hinweis: $\operatorname{grad} M_h \subset X_h$

Aufgabe 39: Betrachtet werde das Neumann-Problem zur Poissongleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial u / \partial n = 0 \quad \text{auf } \partial \Omega.$$

- Zeigen Sie mit dem Gauß'schen Integralsatz, dass das Problem nur lösbar ist, falls $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$.
- Da mit u auch $u + \text{const.}$ eine Lösung ist, kann man die Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} u dx = 0$$

fordern. Formulieren Sie das zugehörige Sattelpunktproblem in $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass die Brezzi-Bedingungen erfüllt sind.
Hinweis: Sie wissen (zumindest für konvexes Ω), dass

$$\|v - Mv\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \cdot |v|_{1,\Omega}.$$

- Diskutieren Sie ein (gemischtes) Finite-Element-Verfahren für dieses Sattelpunktproblem.

Aufgabe 40: Für die Unterräume X_h, M_h sei bekannt, daß sie die Brezzi-Bedingungen erfüllen. Es werde nun X_h oder M_h vergrößert oder verkleinert. Welche der Bedingungen müssen jeweils neu geprüft werden?

Besprechung in den Übungen am 03.02.2010