

## 12. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

### Aufgabe 34: (Lineare Optimierer)

- (a) Seien  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = (6, 1)^T$  und  $c = (13, 0, 0, 12)^T$ . Zeigen Sie:  $(0, 6, 1, 0)^T$  ist die einzige Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

- (b) Nun sei  $A$  die Einheitsmatrix und  $b$  und  $c$  seien Vektoren mit positiven Einträgen. Bestimmen Sie die Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

### Aufgabe 35: (Bedingungen für Optimalität)

Zur linearen Optimierungsaufgabe  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ ,  $c^T x$  minimal! sei

$$L(x, y) := c^T x - y^T (Ax - b)$$

die Lagrangefunktion. Zeigen Sie für  $x \geq 0$ :  $x, y$  sind genau dann optimal für das primale bzw. duale Problem, wenn  $(x, y)$  Sattelpunkt von  $L$  ist, d.h.

$$\max_{v \in \mathbb{R}^m} L(x, v) = L(x, y) = \min_{u \in \mathbb{R}_+^n} L(u, y).$$

Hinweis: Wählen Sie für die Rückrichtung  $v$  und  $u$  geschickt.

Aufgabe 36: Betrachten Sie das Problem bzw. das zugehörige duale Problem

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \max! \end{cases} \quad \begin{cases} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \\ b^T y = \min! \end{cases}$$

Leiten Sie die Optimalitätsbedingungen her.

**Programmieraufgabe 11:** Bestimmen Sie eine Ecke für die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \min! \end{cases}$$

indem Sie “Schritt (a)” des Simplex-Algorithmus implementieren.

**Hinweis:** Ein Startwert wird gefunden, indem man das folgende transformiertes Problem, wieder mit dem Simplexalgorithmus, löst: suche  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{cases} [I_m \ A]\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \\ [\mathbf{1}_m \ \mathbf{0}_n]\bar{x} = \min!, \end{cases}$$

mithilfe des Startwerts  $\bar{x}_0 = [b^T \ \mathbf{0}_n]^T$  verwendet werden kann. (Ohne Einschränkung darf hier angenommen werden, dass  $b > 0$ .)

**Besprechung in den Übungen am 21.07.2021.**

**Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätestens 21.07.2021 12:30 Uhr.**

**Dies ist das letzte Übungsblatt für dieses Semester. Für die Klausurzulassung sind somit 23,5 Kreuze nötig.**