Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 07.07.2021

11. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 31: Verstehen Sie einen Simplex-Schritt am Beispiel der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \text{min!} \end{cases}$$

Dabei werde $x = (12, 0, 0)^T$ als Anfangsecke gewählt. Überlegen Sie sich dazu:

(a) Wie ändern sich die Kosten $x_1 + x_2 + x_3$ bei wachsender zweiten Komponente von x?

(b) Wie ändern sich die Kosten $x_1 + x_2 + x_3$ bei wachsender dritten Komponente von x?

(c) Welche Komponente von x wird im ersten Schritt des Simplex-Verfahrens erhöht und warum?

(d) Wie sieht dann die neue Ecke aus?

(e) Warum ist diese Ecke optimal?

Aufgabe 32: Bestimmen Sie eine Ecke für die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \text{min!} \end{cases}$$

mit der "Phase I" des Simplex-Algorithmus.

Aufgabe 33: Betrachten Sie für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq m$ das Problem

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \text{min!} \end{cases}$$

mit zulässigem Bereich $D = \{y \in \mathbb{R}^n; Ay = b, y \geq 0\}$. Zeigen Sie: Falls $\operatorname{rang}(A) = m$, dann existiert stets eine Ecke $x \in D$.

Hinweis: $x \in D$ ist genau dann eine Ecke, wenn x nicht als Konvexkombination von zwei Punkten y, $z \in D$ darstellbar ist, d.h. wenn

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z \text{ mit } \lambda \in [0, 1],\ y,\ z \in D \quad \Rightarrow \quad x = y = z.$$

Überlegen Sie nun: Ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \geq 0$ für $i \in \mathcal{I}$ und $x_i = 0$ für $i \notin \mathcal{I}$, wo $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ eine m-elementige Teilmenge ist, und $A_\mathcal{I} = (Ae_j)_{j \in \mathcal{I}}$ ist eine Ecke, falls $A_\mathcal{I}$ regulär ist. Betrachten Sie dann einen Vektor $x \in D$ mit minimaler Anzahl nichtverschwindender Komponenten und zeigen Sie, dass die reduzierte Matrix $A_\mathcal{I}$ vollen Rang hat, wobei $\mathcal{I}$ diejenigen Indizes sind, deren zugehörige x-Komponente nicht verschwindet. Benutzen Sie schließlich $\operatorname{rang}(A) = m$.

Programmieraufgabe 10: Implementieren Sie den Simplexalgorithmus und testen Sie Ihr Programm an dem Beispiel von Klee und Minty mit $\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} x_i = \max!$ und

$$\sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \leq 5^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$x \geq 0$$

mit $n = 3, 4, 5$. Überführen Sie das Problem zuerst in Standardform. Starten Sie jeweils mit der Ecke $x = (b^T\, 0 \ldots 0)^T$, wobei $b = (5\, 5^2 \ldots 5^n)^T$. Plotten Sie die Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte. Wieviele Schritte benötigt das Verfahren für dieses Beispiel?

Besprechung in den Übungen am 14.07.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 14.07.2021 12:30 Uhr.