Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 30.06.2021

10. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 27: (Orthogonale Transformationen bei Arnoldi)

Zur (näherungsweisen) Lösung von $Ax = b$ mit einer nicht singulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird das GMRES bzw. das FOM-Verfahren verwendet. Dabei sei $\{v_1, ..., v_k\}$ die Arnoldi-Basis zum Startvektor b.

Weiter seien $\hat{A} = QAQ^T$ und $\hat{b} = Qb$ mit einer orthogonalen Matrix Q. Das GMRES bzw. das FOM-Verfahren wird auch zur Lösung von $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ verwendet. Zeigen Sie:

(a) Für die Vektoren $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_k\}$ der neuen Arnoldi-Basis gilt $\hat{v}_j = Qv_j$.

(b) Zeigen Sie damit, dass GMRES und FOM für das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ die Lösung $\hat{x}_k = Qx_k$ liefern.

Aufgabe 28:

Zeigen Sie, dass die Matrix $\widetilde{H}_k$ aus dem Arnoldi-Verfahren vollen Rang hat und dass lineare Ausgleichsprobleme mit dieser Matrix eindeutig lösbar sind.

Aufgabe 29: (Vereinfachung bei Lanczos)

Zeigen Sie: Kennt man eine nichtsinguläre Matrix S, so dass $A^T = SAS^{-1}$ gilt (eine solche Matrix gibt es immer), so kann man die Berechnung der Folge $\{w_k\}$ im Lanczos-Verfahren einsparen, wenn man $w_1 = Sv_1$ wählt.

Hinweis: Zeigen Sie $w_k = Sv_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Aufgabe 30: (Abbruch bei Lanczos)

Zeigen Sie: Die Residuen des QMR-Verfahrens stagnieren, d.h. es gilt $x_k^{\mathrm{QMR}} = x_{k-1}^{\mathrm{QMR}}$ genau dann, wenn die k-te BiCG-Iterierte nicht existiert.

Besprechung in den Übungen am 07.07.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 07.07.2021 12:30 Uhr.