Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 23.06.2021

9. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 25: (Abbruch bei Arnoldi)

Das Arnoldi-Verfahren werde auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ angewendet. Zeigen Sie:

(a) Ist $h_{k+1,k} = 0$, so ist der k-te Krylov-Raum K_k ein A-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$, d.h. $AK_k \subseteq K_k$, und es gilt $K_k = K_{k+1} = \ldots = K_N$.

(b) Ist k der Grad des Minimalpolynoms von A, so gibt es ein $j \leq k$, so dass $h_{j+1,j} = 0$.

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass das Arnoldi- und das Lanczos-Verfahren invariant unter Shifts sind, d.h., wenn man A durch $A + \lambda I$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt, bleiben die Krylov-Basen V_k und beim Lanczos-Verfahren W_k unverändert. Wie ändern sich die Hessenbergmatrizen H_k bzw. T_k?

Programmieraufgabe 8: Programmieren Sie das FOM-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierungen anhand des Gleichungssystems

```
load west0479;
 A = west0479;
 b = sum(A,2);
```

Mittels `spy(A)` können Sie sich einen Eindruck von der Struktur der Matrix A verschaffen. Stellen Sie die Norm des Residuums in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte dar.

Programmieraufgabe 9: Programmieren das GMRES-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierungen anhand des Gleichungssystems

```
load west0479;
 A = west0479;
 b = sum(A,2);
```

Mittels `spy(A)` können Sie sich einen Eindruck von der Struktur der Matrix A verschaffen. Stellen Sie die Norm der Residuen in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte dar.
Implementieren Sie auch eine Linksvorkonditionierung für das GMRES-Verfahren, d.h. wenden Sie das Verfahren auf das zu $Ax = b$ äquivalente System

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

an. Benutzen Sie anstelle von B die unvollständige LU-Zerlegung

```
[L,U,P] = ilu(A,struct('type','ilutp','droptol',1e-6));
```

und plotten Sie wieder die Residuen.

Besprechung in den Übungen am 30.06.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 30.06.2021 12:30 Uhr.