Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.06.2021

8. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 22: (Vorkonditionierung)

Beim vorkonditionierten cg-Verfahren gelte für die Ausgangsmatrix A und die Vorkonditionierungsmatrix B folgende Abschätzung:

$$\gamma(v, B^{-1}v) \leq (v, Av) \leq \Gamma(v, B^{-1}v), \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\gamma, \Gamma > 0$.

Zeigen Sie, daß für den Fehler nach k Schritten gilt

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\tilde{\kappa}} - 1}{\sqrt{\tilde{\kappa}} + 1} \right)^k \|x_0 - x\|_A, \qquad \text{mit } \tilde{\kappa} = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

Hinweis: Nach der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass mit $B = CC^T$ und $\widetilde{A} = C^T AC$ gilt: $\mathrm{cond}_2(\widetilde{A}) \leq \Gamma/\gamma$.

Aufgabe 23:

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer und positiv definiter Matrix A soll mit und ohne Vorkonditionierung gelöst werden. Die Konditionszahl von A sei 10.000, die des vorkonditionierten Systems 100.

Geben Sie obere Schranken für die Anzahl der Iterationsschritte an, die die Methode des steilsten Abstiegs (ohne Vorkonditionierung) und das cg-Verfahren (mit und ohne Vorkonditionierung) benötigen, um den Fehler (gemessen in der A-Norm) um den Faktor 10^5 zu reduzieren?

Aufgabe 24: (Fletcher–Reeves)

Beim cg-Verfahren von Fletcher–Reeves kann man die eindimensionalen Minimierungsverfahren näherungsweise lösen bis die Abbruchbedingung

$$|g_{k+1}^T d_k| \leq \sigma g_k^T d_k, \qquad \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass dann das Verfahren für jedes k ein Abstiegsverfahren ist, d.h., dass die Suchrichtung $-d_k$ eine Abstiegsrichtung ist, d.h., dass für kleine $\alpha > 0$ gilt

$$f(x_k - \alpha d_k) < f(x_k).$$

Hinweis: Zeigen Sie für $d_0 = g_0$ mit vollständiger Induktion

$$\left| \frac{g_k^T d_k}{g_k^T g_k} - 1 \right| \leq \sum_{j=0}^{k} \sigma^j - 1.$$

Welche Werte kann $g_k^T d_k$ also annehmen? Interpretieren Sie nun $g_k^T d_k$ geometrisch.

Programmieraufgabe 7:

Programmieren Sie vorkonditionierte cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A. Verwenden sie dabei, wie in der Vorlesung, die unvollständige Cholesky-Zerlegung zur Vorkonditionierung.

Testen Sie Ihre Funktion zum Beispiel anhand der Matrix aus PA6. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus PA6.

Besprechung in den Übungen am 23.06.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 23.06.2021 12:30 Uhr.