Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.06.2021

7. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 20: (Orthogonalität und Skalarprodukte)

Zeigen Sie:

a) Bzgl. des Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ sind in der Methode des steilsten Abstiegs zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen und im cg-Verfahren die Gradienten g_k zueinander orthogonal. (Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass im cg-Verfahren Suchrichtungen d_k zueinander A-orthogonal sind.)

b) Im cg-Verfahren ist

$$\frac{(d_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(g_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)}, \qquad \frac{(Ad_k, g_{k+1})}{(Ad_k, d_k)} = -\frac{(g_{k+1}, g_{k+1})}{(g_k, g_k)} .$$

Aufgabe 21: (Konvergenz im cg-Verfahren)

Die Eigenwerte von A (symmetrisch und positiv definit) seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Zeigen Sie: Mit $\kappa' = \lambda_2/\lambda_n$ gilt für den Fehler im cg-Verfahren

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa'} - 1}{\sqrt{\kappa'} + 1} \right)^{k-1} \|x_0 - x\|_A \quad \text{für } k \geq 2.$$

(Falls $\lambda_1 \gg \lambda_2$, so ist dies deutlich schärfer als die ähnliche Abschätzung mit $\kappa = \lambda_1/\lambda_n$ der Vorlesung.)

Hinweis: $q_k(\lambda) = \widetilde{q}_{k-1}(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)/\lambda_1$.

Programmieraufgabe 5: Programmieren Sie die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A.

Testen Sie Ihre Funktion anhand von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und stellen Sie die ersten 50 Iterierten graphisch dar.

Hinweis: Besonders anschaulich wird die graphische Darstellung, wenn die Iterierten in ein Höhenprofil von der (zu minierenden) Funktion f eingezeichnet werden. Das geht zum Beispiel mit

```
hold on;
[x1,x2] = meshgrid(-20:1:20,-20:1:20);
contour(x1,x2,x1.^2 + 20*x2.^2,[0:1:400].^2);
plot(hier sollten die Iterierten stehen,'-*','Linewidth',2)
hold off;
```

Programmieraufgabe 6: Programmieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A.

Testen Sie Ihre Funktion anhand der Matrix aus PA5 und stellen Sie wieder die Iterierten graphisch dar. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus PA5. Testen Sie Ihre Funktion dann anhand der Matrix generiert durch

```
function A = MatrixGenerator(N)
A = -4*diag(ones(N^2,1)) - diag(ones(N*(N-1),1),N) - diag(ones(N*(N-1),1),-N);
for i=0:N-1
   for j=1:N-1
      A(j+i*N,j+1+i*N) = -1;
      A(j+1+i*N,j+i*N) = -1;
   end
end
```

mit $N = 4, 20, 40$.

Besprechung in den Übungen am 16.06.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 16.06.2021 12:30 Uhr.