Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.06.2021

6. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 17: (Waidmanns Heil)

Führen Sie die in der Vorlesung beschriebene "Zickzackjagd nach Nichtnullelementen" durch für

$$BQ^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18:

Seien $V \leq W \leq \mathbb{R}^n$ und $V^\perp = \{w \in W \,:\, w^T A v = 0 \text{ für alle } v \in V\}$ der zu V konjugierte Unterraum von W ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit). Dann existieren zu $w \in W$ eindeutig bestimmte $v \in V$ und $d \in V^\perp$ mit

$$w = v + d,$$

wobei $v = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(Ad_j, w)}{(Ad_j, d_j)} d_j$, falls $d_0, \ldots, d_{k-1}$ eine A-orthogonale Basis von V ist (d.h. $(Ad_i, d_j) = 0$ für $i \neq j$).

Aufgabe 19: (Methode des steilsten Abstiegs)

Wie kann die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A benutzt werden?

Zeigen Sie: In der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$ gilt für den Fehler der Iterierten

$$\|x_k - x\|_A \leq \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\Big)^{k/2} \|x_0 - x\|_A.$$

($\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$.) Das Verfahren konvergiert also (aber sehr langsam, falls A schlecht konditioniert ist).

Hinweis: Verwenden Sie (zum Beispiel) das folgende Grundgerüst

$$\begin{aligned} \|x_k - x\|_A^2 &= \ldots = d_k^T A^{-1} d_k = \ldots = d_k^T A^{-1} d_{k-1} = \ldots \\ &= d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1} \Big(1 - \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1}}\Big) \leq \ldots = \|x_{k-1} - x\|_A^2 \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\Big). \end{aligned}$$

Programmieraufgabe 4:

Sei eine $m \times n$ Matrix A und deren Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Σ_r nicht singulär, gegeben.

Überlegen Sie sich, dass die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 = \min, \qquad \|x\|_2 = \min \tag{1}$$

durch

$$x = A^+ b, \qquad A^+ = V\Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gegeben ist.

Schreiben Sie dann ein Matlab-Programm, welches das Problem (1) auf die genannte Weise löst.
Hinweis: Wenn sie in der Matlab-Hilfe nach 'svd' (wie 'singular value decomposition') suchen, brauchen Sie die Singulärwertzerlegung nicht selbst zu programmieren.

Besprechung in den Übungen am 09.06.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 09.06.2021 12:30 Uhr.