Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 19.05.2021

5. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 14: (Berechnung von Eigenvektoren)

Wie lassen sich die Eigenvektoren einer oberen Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen berechnen? Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an. Skizzieren Sie grob, wie daraus sämtliche Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Matrix A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten berechnet werden können.

Aufgabe 15: (Frobenius-Norm)

Zeigen Sie, dass $\|A\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}$ eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen definiert, für die $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A)$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass es kein Norm $\|.\|$ auf dem n-dimensionalen Raum gibt mit

$$\|A\|_F = \max_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Aufgabe 16: (Eigenschaften der Singulärwertzerlegung)

Sei $U^T A V = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, wobei $U = (u_1, \ldots u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \,, \\ \|A\|_2 &= \sigma_1 \,, \\ \|A\|_F^2 &= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2, \end{aligned}$$

wobei $\|A\|_F$ die Frobeniusnorm aus Aufgabe 15 bezeichnet. Folgern Sie daraus:

$$\begin{aligned} \text{Rang } A &= r \,, \\ \text{Ker } A &= < v_{r+1}, \ldots, v_n > \,, \\ \text{Im } A &= < u_1, \ldots, u_r > \ . \end{aligned}$$

Besprechung in den Übungen am 02.06.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 02.06.2021 12:30 Uhr.