Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 05.05.2021

3. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 8: (Kondition)

(a) Sei λ eine einfache Nullstelle des charakterisitischen Polynoms von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl des Eigenwerts λ von A existiert (d.h. $u^*v \neq 0$) und invariant ist unter unitären Ähnlichkeitstransformationen ist (d.h., dass der Eigenwert λ der Matrix U^*AU mit unitärer Matrix U dieselbe Konditionszahl hat).

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ und Links-Eigenvektoren $u_1^*, \dots, u_n^*$. Sei weiters $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig.

Zeigen Sie: Die Matrix $A + \varepsilon C$ hat die Eigenvektoren

$$v_j(\varepsilon) = v_j + \varepsilon \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{u_i^* C v_j}{u_i^* v_i} v_i + O(\varepsilon^2)$$

Hinweis: Drücken Sie $v_j'(0)$ als Linearkombination der v_i aus. Benützen Sie zur Bestimmung der Koeffizienten von v_i $(i \neq j)$, dass $u_i^* v_j = 0$ für $i \neq j$ (warum?). Betrachten Sie ein geeignet skaliertes $v_j(\varepsilon)$, um auch den Koeffizienten von v_j wie behauptet zu bekommen.

Aufgabe 9:

Zeigen Sie: Ist B eine normale und A eine beliebige $n \times n$ Matrix, dann gibt es zu jedem Eigenwert λ von A einen Eigenwert μ von B mit

$$|\lambda - \mu| \leq ||A - B||_2$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist λ kein Eigenwert von B, so gilt:

$$||(\lambda I - B)^{-1}||_2 = \frac{1}{\min\limits_{\mu\in\lambda(B)} |\lambda - \mu|}.$$

Betrachten Sie dann für den zu λ gehörenden Eigenvektor x von A den Vektor $(A - B)x$.

Aufgabe 10: (Satz von Gerschgorin)

a) Zeigen Sie: Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |a_{i,k}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $Ax = \lambda x$ komponentenweise.

b) Zeichnen Sie alle Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Menge der möglichen Eigenwerte weiter einschränken können.

Aufgabe 11: Berechenen Sie die Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $\tilde{A} = A + \epsilon C$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \hat{e}_n \hat{e}_1^T.$$

Was ergibt sich für $n = 8$ und $\epsilon = 10^{-8}$?

Besprechung in den Übungen am 12.05.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 12.05.2021 13:00 Uhr.