

2. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 5: (Sortierproblem)

Eine Datei von $N = 2^L$ Namen soll alphabetisch geordnet werden. Geben Sie einen Algorithmus an, der dies in $\mathcal{O}(N \log N)$ Operationen durchführt. Wir gehen dabei davon aus, dass Namen in $\mathcal{O}(1)$ verglichen werden können.

Hinweis: Divide et impera!

Aufgabe 6: Sei f stetig und 2π -periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel lautet

$$\widetilde{f}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \quad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie die Aliasing-Formel

$$\widetilde{f}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n + lN).$$

Aufgabe 7: (Tschebyscheff-Interpolation)

Die Funktion $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ besitze die Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen

$$g(x) = \frac{1}{2} \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k T_k(x)$$

mit absolut summierbaren Koeffizienten (γ_k) . Sei

$$p(x) = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_0 + \sum_{k=1}^n \tilde{\gamma}_k T_k(x)$$

das Tschebyscheff'sche Interpolationspolynom zu g vom Grade n , wobei Sie aus Numerik I wissen, dass

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n g(\cos(t_j)) \cos(kt_j), \quad t_j = \frac{2j+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie:

$$\tilde{\gamma}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \gamma_{k+2(n+1)l}.$$

Hinweis: Es gilt $\gamma_{-k} = \gamma_k$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Programmieraufgabe 1: Implementieren Sie die schnelle Fourier-Transformation (ohne Verwendung von `fft` und `ifft`). Sie dürfen annehmen, dass die Länge des Eingavektors eine Zweierpotenz ist.

Hinweis: Implementieren Sie die schnelle Fourier-Transformation rekursiv (d.h. Ihre Funktion ruft sich selbst wieder auf).

Besprechung in den Übungen am 05.05.2021.

Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätestens 05.05.2021 13:00 Uhr.

Senden Sie Ihre Lösung der Programmieraufgabe Ihrem Tutor bis spätestens 05.05.2021 13:00 Uhr zu.