Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 21.04.2021

1. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 1: (Sinus-/Cosinusreihe)

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer stetigen, 2π-periodischen Funktion, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

erlaubt. Geben Sie a_n, b_n als Funktion der c_n an. Wie lassen sich a_n und b_n aus $f(t)$ berechnen? Was ergibt sich für gerade und ungerade Funktionen ($f(t) = f(-t)$ bzw. $f(t) = -f(-t)$)?

Aufgabe 2: Zeigen Sie den Faltungssatz:
Falls die komplexen Folgen $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $d = (d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ absolut summierbar sind, so ist es auch die Faltung $c * d$, und es gilt

$$\widehat{(c * d)}(t) = \hat{c}(t)\hat{d}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3: (Cesàro-Summen)

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die *Cesàro-Summe*

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie: Aus der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein a folgt Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert aber nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4:

(a) Sei $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ (also x_j *reell*). Zeigen Sie: $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$ für $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\hat{x}$ die diskrete Fourier-Transformierte von x ist.

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine gerade Folge ist (d.h., $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade. Falls x ungerade ist (d.h., $x_{-k} = -x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ ungerade.

Besprechung in den Übungen am 28.04.2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätenstens 28.04.2021 13:00 Uhr.