Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 10.07.2019

11. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 27: (Lineare Optimierer)

(a) Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $b = (6,1)^T$ und $c = (13,0,0,12)^T$. Zeigen Sie: $(0,6,1,0)^T$ ist die einzige Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

(b) Nun sei A die Einheitsmatrix und b und c seien Vektoren mit positiven Einträgen. Bestimmen Sie die Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

Aufgabe 28: (Bedingungen für Optimalität)

Zur linearen Optimierungsaufgabe $Ax = b$, $x \geq 0$, $c^T x$ minimal! sei

$$L(x,y) := c^T x - y^T (Ax - b)$$

die Lagrangefunktion. Zeigen Sie für $x \geq 0$: x, y sind genau dann optimal für das primale bzw. duale Problem, wenn (x,y) Sattelpunkt von L ist, d.h.

$$\max_{v \in \mathbb{R}^m} L(x,v) = L(x,y) = \min_{u \in \mathbb{R}^n_+} L(u,y).$$

Hinweis: Wählen Sie für die Rückrichtung v und u geschickt.

Programmieraufgabe 15: Bestimmen Sie eine Ecke für die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \text{min!} \end{cases}$$

indem Sie "Schritt (a)" des Simplex-Algorithmus implementieren.

Hinweis: Ein Startwert wird gefunden, indem man das folgende transformiertes Problem, wieder mit dem Simplexalgorithmus, löst: suche $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{cases} [I_m \ A]\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \\ [\mathbf{1}_m \ \mathbf{0}_n]\bar{x} = \text{min!}, \end{cases}$$

mithilfe des Startwerts $\bar{x}_0 = [b^T \ \mathbf{0}_n]^T$ verwendet werden kann. (Ohne Einschränkung darf hier angenommen werden, dass $b > 0$.)

Programmieraufgabe 16: Implementieren Sie den Simplexalgorithmus und testen Sie Ihr Programm an dem Beispiel von Klee und Minty mit $\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} x_i = \text{max!}$ und

$$\sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \leq 5^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$x \geq 0$$

mit $n = 3, 4, 5$. Überführen Sie das Problem zuerst in Standardform. Starten Sie jeweils mit der Ecke $x = (b^T \, 0 \, \ldots \, 0)^T$, wobei $b = (5 \, 5^2 \, \ldots \, 5^n)^T$. Plotten Sie die Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte. Wieviele Schritte benötigt das Verfahren für dieses Beispiel?

Besprechung in den Übungen am 17.07.2019.