

10. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 25:

Vom FOM-Algorithmus ist bekannt, dass nicht alle Iterierten x_k existieren müssen. Ist es möglich, ein Beispiel zu konstruieren, bei dem die erste Iterierte des FOM-Algorithmus zwar nicht existiert aber die zweite schon die Lösung liefert? Betrachten Sie dazu die Fälle

- a) einer symmetrisch positiv definiten Matrix,
- b) einer regulären Matrix,

und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 26: (Orthogonale Transformationen bei Arnoldi)

Zur (näherungsweisen) Lösung von $Ax = b$ mit einer nicht singulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird das GMRES bzw. das FOM-Verfahren verwendet. Dabei sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ die Arnoldi-Basis zum Startvektor b .

Weiter seien $\hat{A} = QAQ^T$ und $\hat{b} = Qb$ mit einer orthogonalen Matrix Q . Das GMRES bzw. das FOM-Verfahren wird auch zur Lösung von $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ verwendet. Zeigen Sie:

- (a) Für die Vektoren $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ der neuen Arnoldi-Basis gilt $\hat{v}_j = Qv_j$.
- (b) Zeigen Sie damit, dass GMRES und FOM für das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ die Lösung $\hat{x}_k = Qx_k$ liefern.

Programmieraufgabe 13: Programmieren Sie das FOM-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierungen anhand des Gleichungssystems

```
load west0479;  
A = west0479;  
b = sum(A,2);
```

Mittels `spy(A)` können Sie sich einen Eindruck von der Struktur der Matrix A verschaffen. Stellen Sie die Norm des Residuums in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte dar.

Programmieraufgabe 14: Programmieren das GMRES-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierungen anhand des Gleichungssystems

```
load west0479;  
A = west0479;  
b = sum(A,2);
```

Mittels `spy(A)` können Sie sich einen Eindruck von der Struktur der Matrix A verschaffen. Stellen Sie die Norm der Residuen in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte dar.

Implementieren Sie auch eine Linksvorkonditionierung für das GMRES-Verfahren, d.h. wenden Sie das Verfahren auf das zu $Ax = b$ äquivalente System

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

an. Benutzen Sie anstelle von B die unvollständige LU-Zerlegung

```
[L,U,P] = ilu(A,struct('type','ilutp','droptol',1e-6));
```

und plotten Sie wieder die Residuen.

Besprechung in den Übungen am 10.07.2019.