Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.06.2019

9. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 22: (Vorkonditionierung)

a) Beim vorkonditionierten cg-Verfahren gelte für die Ausgangsmatrix A und die Vorkonditionierungsmatrix B folgende Abschätzung:

$$\gamma(v, B^{-1}v) \le (v, Av) \le \Gamma(v, B^{-1}v), \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\gamma, \Gamma > 0$.

Zeigen Sie, daß für den Fehler nach k Schritten gilt

$$\|x_k - x\|_A \le 2\left(\frac{\sqrt{\tilde\kappa}-1}{\sqrt{\tilde\kappa}+1}\right)^k \|x_0 - x\|_A, \qquad \text{mit } \tilde\kappa = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

Hinweis: Nach der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass mit $B = CC^T$ und $\widetilde{A} = C^T AC$ gilt: $\mathrm{cond}_2(\widetilde{A}) \le \Gamma/\gamma$.

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer und positiv definiter Matrix A soll mit und ohne Vorkonditionierung gelöst werden. Die Konditionszahl von A sei 10.000, die des vorkonditionierten Systems 100.

Geben Sie obere Schranken für die Anzahl der Iterationsschritte an, die die Methode des steilsten Abstiegs (ohne Vorkonditionierung) und das cg-Verfahren (mit und ohne Vorkonditionierung) benötigen, um den Fehler (gemessen in der A-Norm) um den Faktor 10^5 zu reduzieren?

Aufgabe 23: (Fletcher–Reeves)

Beim cg-Verfahren von Fletcher–Reeves kann man die eindimensionalen Minimierungsverfahren näherungsweise lösen bis die Abbruchbedingung

$$|g_{k+1}^T d_k| \le \sigma g_k^T d_k, \qquad \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass dann das Verfahren für jedes k ein Abstiegsverfahren ist, d.h., dass die Suchrichtung $-d_k$ eine Abstiegsrichtung ist, d.h., dass für kleine $\alpha > 0$ gilt

$$f(x_k - \alpha d_k) < f(x_k).$$

Hinweis: Zeigen Sie für $d_0 = g_0$ mit vollständiger Induktion

$$\left|\frac{g_k^T d_k}{g_k^T g_k} - 1\right| \le \sum_{j=0}^{k} \sigma^j - 1.$$

Welche Werte kann $g_k^T d_k$ also annehmen? Interpretieren Sie nun $g_k^T d_k$ geometrisch.

Aufgabe 24: (Abbruch bei Arnoldi)

Das Arnoldi-Verfahren werde auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ angewendet. Zeigen Sie:

(a) Ist $h_{k+1,k} = 0$, so ist der k-te Krylov-Raum K_k ein A-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$, d.h. $AK_k \subseteq K_k$, und es gilt $K_k = K_{k+1} = \ldots = K_N$.

(b) Ist k der Grad des Minimalpolynoms von A, so gibt es ein $j \leq k$, so dass $h_{j+1,j} = 0$.

Programmieraufgabe 12: Programmieren Sie vorkonditionierte cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A. Verwenden sie dabei, wie in der Vorlesung, die unvollständige Cholesky-Zerlegung zur Vorkonditionierung.

Testen Sie Ihre Funktion zum Beispiel anhand der Matrix aus PA11. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus PA11.

Besprechung in den Übungen am 03.07.2019.