Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 19.06.2019

# 8. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

**Aufgabe 20:** (Konvergenz im cg-Verfahren)

Die Eigenwerte von $A$ (symmetrisch und positiv definit) seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Zeigen Sie: Mit $\kappa' = \lambda_2/\lambda_n$ gilt für den Fehler im cg-Verfahren

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa'} - 1}{\sqrt{\kappa'} + 1} \right)^{k-1} \|x_0 - x\|_A \quad \text{für } k \geq 2.$$

(Falls $\lambda_1 \gg \lambda_2$, so ist dies deutlich schärfer als die ähnliche Abschätzung mit $\kappa = \lambda_1/\lambda_n$ der Vorlesung.)

Hinweis: $q_k(\lambda) = \widetilde{q}_{k-1}(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)/\lambda_1$ .

**Aufgabe 21:** (Tschebyscheff-Polynome II)

Zeigen Sie, dass das $k$-te Tschebyscheff-Polynom $T_k$, $k \in \mathbb{N}$, für $|t| \geq 1$ die Darstellung

$$T_k(t) = \frac{1}{2} \left( \left( t + \sqrt{t^2 - 1} \right)^k + \left( t + \sqrt{t^2 - 1} \right)^{-k} \right)$$

besitzt. Zeigen Sie damit, dass für $\kappa > 1$

$$\left| T_k\Big( -\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \Big) \right| \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right|^{-k}.$$

**Programmieraufgabe 10:** Programmieren Sie die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix $A$.

Testen Sie Ihre Funktion anhand von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und stellen Sie die ersten 50 Iterierten graphisch dar.

Hinweis: Besonders anschaulich wird die graphische Darstellung, wenn die Iterierten in ein Höhenprofil von der (zu minierenden) Funktion $f$ eingezeichnet werden. Das geht zum Beispiel mit

```
hold on;
[x1,x2] = meshgrid(-20:1:20,-20:1:20);
contour(x1,x2,x1.^2 + 20*x2.^2,[0:1:400].^2);
plot(hier sollten die Iterierten stehen,'-*','Linewidth',2)
hold off;
```

**Programmieraufgabe 11:** Programmieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix $A$.

Testen Sie Ihre Funktion anhand der Matrix aus PA11 und stellen Sie wieder die Iterierten graphisch dar. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus PA11. Testen Sie Ihre Funktion dann anhand der Matrix generiert durch

```
function A = MatrixGenerator(N)
A = -4*diag(ones(N^2,1)) - diag(ones(N*(N-1),1),N) - diag(ones(N*(N-1),1),-N);
for i=0:N-1
   for j=1:N-1
      A(j+i*N,j+1+i*N) = -1;
      A(j+1+i*N,j+i*N) = -1;
   end
end
```

mit $N = 4, 20, 40$.

**Besprechung in den Übungen am 26.06.2019.**