Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 05.06.2015

7. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 17: (Waidmanns Heil)

Führen Sie die in der Vorlesung beschriebene “Zickzackjagd nach Nichtnullelementen” durch für

$$BQ^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18: (Orthogonalität und Skalarprodukte)

Zeigen Sie:

a) Bzgl. des Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ sind in der Methode des steilsten Abstiegs zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen und im cg-Verfahren die Gradienten g_k zueinander orthogonal. (Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass im cg-Verfahren Suchrichtungen d_k zueinander A-orthogonal sind.)

b) Im cg-Verfahren ist

$$\frac{(d_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(g_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)}, \qquad \frac{(Ad_k, g_{k+1})}{(Ad_k, d_k)} = -\frac{(g_{k+1}, g_{k+1})}{(g_k, g_k)}.$$

Aufgabe 19: (Methode des steilsten Abstiegs)

Wie kann die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A benutzt werden?

Zeigen Sie: In der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$ gilt für den Fehler der Iterierten

$$\|x_k - x\|_A \le \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\right)^{k/2} \|x_0 - x\|_A.$$

($\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$.) Das Verfahren konvergiert also (aber sehr langsam, falls A schlecht konditioniert ist).

Hinweis: Verwenden Sie (zum Beispiel) das folgende Grundgerüst

$$\begin{aligned} \|x_k - x\|_A^2 &= \ldots = d_k^T A^{-1} d_k = \ldots = d_k^T A^{-1} d_{k-1} = \ldots \\ &= d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1} \left(1 - \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1}}\right) \le \ldots = \|x_{k-1} - x\|_A^2 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\right). \end{aligned}$$

Programmieraufgabe 9: Sei eine $m \times n$ Matrix A und deren Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Σ_r nicht singulär, gegeben.

Überlegen Sie sich, dass die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 = \min, \qquad \|x\|_2 = \min \tag{1}$$

durch

$$x = A^+ b, \qquad A^+ = V\Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gegeben ist.

Schreiben Sie dann ein Matlab-Programm, welches das Problem (1) auf die genannte Weise löst.
Hinweis: Wenn sie in der Matlab-Hilfe nach 'svd' (wie 'singular value decomposition') suchen, brauchen Sie die Singulärwertzerlegung nicht selbst zu programmieren.

Besprechung in den Übungen am 19.06.2019.