Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 29.05.2019

6. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 14: (Berechnung von Eigenvektoren)

Wie lassen sich die Eigenvektoren einer oberen Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen berechnen? Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an. Skizzieren Sie grob, wie daraus sämtliche Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Matrix A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten berechnet werden können.

Aufgabe 15: (Frobenius-Norm)

Zeigen Sie, dass $\|A\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}$ eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen definiert, für die $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A)$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass es kein Norm $\|.\|$ auf dem n-dimensionalen Raum gibt mit

$$\|A\|_F = \max_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Aufgabe 16: (Eigenschaften der Singulärwertzerlegung)

Sei $U^T AV = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \dots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, wobei $U = (u_1, \dots u_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \,,$$
$$\|A\|_2 = \sigma_1 \,,$$
$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2,$$

wobei $\|A\|_F$ die Frobeniusnorm aus Aufgabe 15 bezeichnet. Folgern Sie daraus:

$$\text{Rang } A = r \,,$$
$$\text{Ker } A = < v_{r+1}, \dots, v_n > ,$$
$$\text{Im } A = < u_1, \dots, u_r > \;.$$

Programmieraufgabe 8: Verwenden Sie Ihren Code aus Teil PA7 (oder entsprechende Matlab-Funktionen) um den QR-Algorithmus mit Shift für Tridiagonalmatrizen zu implementieren. Verwenden Sie dazu einmal den Shift wie in der Vorlesung und einmal den sogenannten *Wilkinson-Shift*:

$$\mu = h_{n,n} + d - \operatorname{sign}(d)\sqrt{d^2 + h_{n-1,n}^2}$$

mit $d = (h_{n-1,n-1} - h_{n,n})/2$ und $\operatorname{sign}(0) \in \{1, -1\}$ (μ ist der Eigenwert der unteren rechten 2×2-Untermatrix von H, der näher an $h_{n,n}$ liegt).

Testen Sie Ihr Programm an $A = \operatorname{tridiag}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n = 20$. Stellen Sie die Konvergenz des ersten berechneten Eigenwertes dar, indem Sie den exakten Fehler in jedem QR-Schritt berechnen und diesen graphisch gegen die Iterationszahl auftragen.

Hinweis: Die exakten Eigenwerte von A sind $\lambda_j = 2\cos\frac{j\pi}{n+1} - 2$, $j = 1, \dots, n$.

Besprechung in den Übungen am 05.06.2019.
Wir wünschen allen Teilnehmern eine schöne und erholsame freie Woche.