

4. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 9: (Satz von Gerschgorin)

a) Zeigen Sie: Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $Ax = \lambda x$ komponentenweise.

b) Zeichnen Sie alle Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Menge der möglichen Eigenwerte weiter einschränken können.

Aufgabe 10: (Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)

Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix, genauer:

$$QR = (QD)(D^{-1}R),$$

wobei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $|d_i| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Programmieraufgabe 5: Programmieren Sie die direkte Potenzmethode. Plotten Sie den Fehler für die folgendermaßen definierten Testmatrizen:

```
n = length(d);  
S = triu(diag(n:-1:1,0) + ones(n,n));  
A = S*diag(d,0)*inv(S);
```

und

```
n = length(d);  
z = diag(sqrt(1:n),0) + ones(n,n);  
[Q R] = qr(z);  
B = Q*diag(d,0)*Q';
```

mit

1. $d = (1:10)'$;
2. $d = [\text{ones}(9,1); 2]$;
3. $d = 1 - 2.^{-(1:0.5:5)}$;

Programmieraufgabe 6: Programmieren Sie die inverse Potenzmethode. Plotten Sie den Fehler für die Testmatrizen aus PA6.