

3. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 6:

Zeigen Sie: Ist B eine normale und A eine beliebige $n \times n$ Matrix, dann gibt es zu jedem Eigenwert λ von A einen Eigenwert μ von B mit

$$|\lambda - \mu| \leq \|A - B\|_2$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist λ kein Eigenwert von B , so gilt:

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{\mu \in \lambda(B)} |\lambda - \mu|}.$$

Betrachten Sie dann für den zu λ gehörenden Eigenvektor x von A den Vektor $(A - B)x$.

Aufgabe 7: (Kondition)

Sei λ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl des Eigenwerts λ von A existiert (d.h. $u^*v \neq 0$) und invariant ist unter unitären Ähnlichkeitstransformationen ist (d.h., dass der Eigenwert λ der Matrix U^*AU mit unitärer Matrix U dieselbe Konditionszahl hat).

Aufgabe 8: (KonditionII)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n und Links-Eigenvektoren u_1^*, \dots, u_n^* . Sei weiters $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig.

Zeigen Sie: Die Matrix $A + \varepsilon C$ hat die Eigenvektoren

$$v_j(\varepsilon) = v_j + \varepsilon \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{u_i^* C v_j}{u_i^* v_i} v_i + O(\varepsilon^2)$$

Hinweis: Drücken Sie $v_j'(\varepsilon)$ als Linearkombination der v_i aus. Benützen Sie zur Bestimmung der Koeffizienten von v_i ($i \neq j$), dass $u_i^* v_j = 0$ für $i \neq j$ (warum?). Betrachten Sie ein geeignet skaliertes $v_j(\varepsilon)$, um auch den Koeffizienten von v_j wie behauptet zu bekommen.

Programmieraufgabe 4: Verwenden Sie Ihren Code aus Teil PA1 (oder die Matlab-Funktionen `fft` und `ifft`) um ein Programm zu schreiben, welches zu vorgegebenen Daten eine normalverteilte Störung addiert und diese Daten dann glättet. Stellen Sie die Daten, die gestörten Daten und die geglätteten Daten graphisch dar. Sie können das nachfolgende (unvollständige) Matlab-Programm verwenden:

```
1   N=256;
2   x=(2*pi/N)*[0:N-1]';
3   f=sin(x)+0.2*sin(3*x)-0.2*cos(6*x);
4
5   e=0.1*randn(N,1);
6
7   b=f+e;
8
9   bb=fft(b);
10  n=[0:N/2-1 -N/2:-1]';
11  alpha=0.0001;
12  *****
13  u=ifft(uu);
14  plot(x,[real(u),f,b]);
15  delta=norm(e)/sqrt(N)
16  d=norm(u-b)/sqrt(N)
```

Zeile 12 scheint leider verloren gegangen zu sein. Füllen sie diese so aus, dass `uu` aus `bb` mithilfe der Filterfunktion mit Regularisierungsparameter α berechnet wird. Testen Sie Ihr Programm für mehrere Werte von α .

Besprechung in den Übungen am 15.05.2019.