Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 17.04.2019

# 1. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

**Aufgabe 1:** (Tschebyscheff-Polynome)

Sei $t_0 \in \mathbb{R}, |t_0| > 1$. Zeigen Sie: Unter allen Polynomen $p_k$ vom Grad $k$ mit $p_k(t_0) = 1$ (bei $t_0$ normiert) wird

$$\max_{t \in [-1,1]} |p_k(t)|$$

minimal für das bei $t_0$ normierte Tschebyscheff-Polynom $T_k(t)/T_k(t_0)$.

**Aufgabe 2:** (Sinus-/Cosinusreihe)

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer stetigen, $2\pi$-periodischen Funktion, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

erlaubt. Geben Sie $a_n, b_n$ als Funktion der $c_n$ an. Wie lassen sich $a_n$ und $b_n$ aus $f(t)$ berechnen? Was ergibt sich für gerade und ungerade Funktionen ($f(t) = f(-t)$ bzw. $f(t) = -f(-t)$)?

**Aufgabe 3:** (Cesàro-Summen)

Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren wir die *Cesàro-Summe*

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie: Aus der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $a$ folgt Konvergenz der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a$, Konvergenz der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert aber nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

**Aufgabe 4:**

(a) Sei $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ (also $x_j$ *reell*). Zeigen Sie für die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{x}$ von $x$

$$\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k} \qquad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die (diskrete) Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.
Falls $x$ ungerade ist (d.h. $x_{-k} = -x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ ungerade.

**Besprechung in den Übungen am 24.04.2019.**