

9. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 26:

Zeigen Sie, dass das k -te Tschebyscheff-Polynom T_k , $k \in \mathbb{N}$, für $|t| \geq 1$ die Darstellung

$$T_k(t) = \frac{1}{2} \left(\left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right)^k + \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right)^{-k} \right)$$

besitzt. Zeigen Sie damit, dass für $\kappa > 1$

$$\left| T_k \left(-\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right) \right| \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right|^{-k}.$$

Aufgabe 27: (Konvergenz im cg-Verfahren)

Die Eigenwerte von A (symmetrisch und positiv definit) seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. Zeigen Sie: Mit $\kappa' = \lambda_2/\lambda_n$ gilt für den Fehler im cg-Verfahren

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa'} - 1}{\sqrt{\kappa'} + 1} \right)^{k-1} \|x_0 - x\|_A \quad \text{für } k \geq 2.$$

(Falls $\lambda_1 \gg \lambda_2$, so ist dies deutlich schärfer als die ähnliche Abschätzung mit $\kappa = \lambda_1/\lambda_n$ der Vorlesung.)

Hinweis: $q_k(\lambda) = \tilde{q}_{k-1}(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)/\lambda_1$.

Aufgabe 28: (Vorkonditionierung)

- a) Beim vorkonditionierten cg-Verfahren gelte für die Ausgangsmatrix A und die Vorkonditionierungsmatrix B folgende Abschätzung:

$$\gamma(v, B^{-1}v) \leq (v, Av) \leq \Gamma(v, B^{-1}v), \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\gamma, \Gamma > 0$.

Zeigen Sie, daß für den Fehler nach k Schritten gilt

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\tilde{\kappa}} - 1}{\sqrt{\tilde{\kappa}} + 1} \right)^k \|x_0 - x\|_A, \quad \text{mit } \tilde{\kappa} = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

- b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer und positiv definiten Matrix A soll mit und ohne Vorkonditionierung gelöst werden. Die Konditionszahl von A sei 10.000, die des vorkonditionierten Systems 100.

Geben Sie obere Schranken für die Anzahl der Iterationsschritte an, die die Methode des steilsten Abstiegs (ohne Vorkonditionierung) und das cg-Verfahren (mit und ohne Vorkonditionierung) benötigen, um den Fehler (gemessen in der A -Norm) um den Faktor 10^5 zu reduzieren?

Besprechung in den Übungen am 27.06.2017

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,

eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 6:

Programmieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiten Matrix A .

Wenden Sie Ihre Funktion auf folgende Daten an:

```
A = bucky;  
b = sparse([0.1*ones(30,1);zeros(30,1)]);  
x0 = sparse(0.1*ones(60,1));
```

Machen Sie sich mit dem sparse data Format in Matlab vertraut.