

## 8. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

### Aufgabe 23: (Methode des steilsten Abstiegs)

Wie kann die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  mit symmetrisch positiv definiten Matrix  $A$  benutzt werden?

Zeigen Sie: In der Norm  $\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$  gilt für den Fehler der Iterierten

$$\|x_k - x\|_A \leq \left(1 - \frac{1}{\text{cond}_2(A)}\right)^{\frac{k}{2}} \|x_0 - x\|_A.$$

( $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$ .) Das Verfahren konvergiert also (aber sehr langsam, falls  $A$  schlecht konditioniert ist).

Hinweis: Verwenden Sie (zum Beispiel) das folgende Grundgerüst

$$\begin{aligned} \|x_k - x\|_A^2 &= \dots = d_k^T A^{-1} d_k = \dots = d_k^T A^{-1} d_{k-1} = \dots \\ &= d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1} \left(1 - \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1}}\right) \leq \dots = \|x_{k-1} - x\|_A^2 \left(1 - \frac{1}{\text{cond}_2(A)}\right). \end{aligned}$$

Machen Sie sich klar, dass zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen zueinander orthogonal sind.

### Aufgabe 24: (Orthogonalität und Skalarprodukte)

Zeigen Sie:

- Bzgl. des Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)$  sind in der Methode des steilsten Abstiegs zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen und im cg-Verfahren die Gradienten  $g_k$  zueinander orthogonal. (Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass im cg-Verfahren Suchrichtungen  $d_k$  zueinander  $A$ -orthogonal sind.)
- Im cg-Verfahren ist

$$\frac{(d_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(g_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)}, \quad \frac{(Ad_k, g_{k+1})}{(Ad_k, d_k)} = -\frac{(g_{k+1}, g_{k+1})}{(g_k, g_k)}.$$

### Aufgabe 25: (Orthogonale Zerlegung)

Seien  $V \leq W \leq \mathbb{R}^n$  und  $V^\perp = \{w \in W : w^T A v = 0 \text{ für alle } v \in V\}$  der zu  $V$  konjugierte Unterraum von  $W$  ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch positiv definit). Dann existieren zu  $w \in W$  eindeutig bestimmte  $v \in V$  und  $d \in V^\perp$  mit

$$w = v + d,$$

wobei  $v = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(Ad_j, w)}{(Ad_j, d_j)} d_j$ , falls  $d_0, \dots, d_{k-1}$  eine  $A$ -orthogonale Basis von  $V$  ist (d.h.  $(Ad_i, d_j) = 0$  für  $i \neq j$ ).

### **Besprechung in den Übungen am 20.06.2017**

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,

eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr