

11. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 26: (Lineare Optimierer)

- (a) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (6, 1)^T$ und $c = (13, 0, 0, 12)^T$. Zeigen Sie: $(0, 6, 1, 0)^T$ ist die einzige Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

- (b) Nun sei A die Einheitsmatrix und b und c seien Vektoren mit positiven Einträgen. Bestimmen Sie die Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

Aufgabe 27: (Bedingungen für Optimalität)

Zur linearen Optimierungsaufgabe $Ax = b$, $x \geq 0$, $c^T x$ minimal! sei

$$L(x, y) := c^T x - y^T (Ax - b)$$

die Lagrangefunktion. Zeigen Sie für $x \geq 0$: x, y sind genau dann optimal für das primale bzw. duale Problem, wenn (x, y) Sattelpunkt von L ist, d.h.

$$\max_{v \in \mathbb{R}^m} L(x, v) = L(x, y) = \min_{u \in \mathbb{R}_+^n} L(u, y).$$

Hinweis: Wählen Sie für die Rückrichtung v und u geschickt.

Programmieraufgabe 16: Implementieren Sie den Simplexalgorithmus und testen Sie Ihr Programm an dem Beispiel von Klee und Minty mit $\sum_{i=1}^n 2^{n-i} x_i = \max!$ und

$$\sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \leq 5^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$x \geq 0$$

mit $n = 3, 4, 5$. Überführen Sie das Problem zuerst in Standardform. Starten Sie jeweils mit der Ecke $x = (b^T 0 \dots 0)^T$, wobei $b = (5 \ 5^2 \dots 5^n)^T$. Plotten Sie die Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte. Wieviele Schritte benötigt das Verfahren für dieses Beispiel?

Programmieraufgabe 17: Bestimmen Sie eine Ecke für die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \min! \end{cases}$$

indem Sie “Phase I” des Simplex-Algorithmus implementieren.

Besprechung in den Übungen am 10.07.2015.