Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 24.06.2015

10. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 24: (Abbruch bei Arnoldi)

Das Arnoldi-Verfahren werde auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ angewendet. Zeigen Sie:

(a) Ist $h_{k+1,k} = 0$, so ist der k-te Krylov-Raum K_k ein A-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$, d.h. $AK_k \subseteq K_k$, und es gilt $K_k = K_{k+1} = \ldots = K_N$.

(b) Ist k der Grad des Minimalpolynoms von A, so gibt es ein $j \leq k$, so dass $h_{j+1,j} = 0$.

Aufgabe 25: (Matrix-Rang bei Arnoldi)

Zeigen Sie, dass die Matrix $\widetilde{H}_k$ aus dem Arnoldi-Verfahren vollen Rang hat und dass lineare Ausgleichsprobleme mit dieser Matrix eindeutig lösbar sind.

Programmieraufgabe 14: Programmieren das GMRES-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierungen anhand des Gleichungssystems

```
load west0479;
A = west0479;
b = sum(A,2);
```

Mittels `spy(A)` können Sie sich einen Eindruck von der Struktur der Matrix A verschaffen. Stellen Sie die Norm der Residuen in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte dar.
Implementieren Sie auch eine Linksvorkonditionierung für das GMRES-Verfahren, d.h. wenden Sie das Verfahren auf das zu $Ax = b$ äquivalente System

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

an. Benutzen Sie anstelle von B die unvollständige LU-Zerlegung

```
[L,U,P] = ilu(A,struct('type','ilutp','droptol',1e-6));
```

und plotten Sie wieder die Residuen.

Programmieraufgabe 15: (BiCG)

Programmieren Sie nun das BiCG-Verfahren (ohne Vorkonditionierung) basierend auf dem Lanczos-Algorithmus. Testen Sie Ihr Programm an dem Gleichungssystem

```
A = mmread('bcspwr03.mtx');
[m n] = size(A);
b = ones(m,1);
```

Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Dateien `mmread.m` und `bcspwr03.mtx`. Stellen Sie hingegen fest, dass das Verfahren angewendet auf das Problem aus PA14 versagt.

Besprechung in den Übungen am 03.07.2015.