Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 10.06.2015

# 8. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

**Aufgabe 19:** (Orthogonalität und Skalarprodukte)

Zeigen Sie:

a) Bzgl. des Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ sind in der Methode des steilsten Abstiegs zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen und im cg-Verfahren die Gradienten $g_k$ zueinander orthogonal. (Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass im cg-Verfahren Suchrichtungen $d_k$ zueinander $A$-orthogonal sind.)

b) Im cg-Verfahren ist

$$\frac{(d_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(g_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)}\,, \qquad \frac{(Ad_k, g_{k+1})}{(Ad_k, d_k)} = -\frac{(g_{k+1}, g_{k+1})}{(g_k, g_k)}\,.$$

**Aufgabe 20:** (Konvergenz im cg-Verfahren)

Die Eigenwerte von $A$ (symmetrisch und positiv definit) seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Zeigen Sie: Mit $\kappa' = \lambda_2/\lambda_n$ gilt für den Fehler im cg-Verfahren

$$\|x_k - x\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa'}-1}{\sqrt{\kappa'}+1}\right)^{k-1} \|x_0 - x\|_A \quad \text{für } k \geq 2.$$

(Falls $\lambda_1 \gg \lambda_2$, so ist dies deutlich schärfer als die ähnliche Abschätzung mit $\kappa = \lambda_1/\lambda_n$ der Vorlesung.)

Hinweis: $q_k(\lambda) = \widetilde{q}_{k-1}(\lambda)\cdot(\lambda_1 - \lambda)/\lambda_1$ .

**Aufgabe 21:** (Vorkonditionierung)

a) Beim vorkonditionierten cg-Verfahren gelte für die Ausgangsmatrix $A$ und die Vorkonditionierungsmatrix $B$ folgende Abschätzung:

$$\gamma(v, B^{-1}v) \leq (v, Av) \leq \Gamma(v, B^{-1}v), \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\gamma, \Gamma > 0$.

Zeigen Sie, daß für den Fehler nach $k$ Schritten gilt

$$\|x_k - x\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\tilde\kappa}-1}{\sqrt{\tilde\kappa}+1}\right)^{k} \|x_0 - x\|_A, \qquad \text{mit } \tilde\kappa = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer und positiv definiter Matrix $A$ soll mit und ohne Vorkonditionierung gelöst werden. Die Konditionszahl von $A$ sei 10.000, die des vorkonditionierten Systems 100.

Geben Sie obere Schranken für die Anzahl der Iterationsschritte an, die die Methode des steilsten Abstiegs (ohne Vorkonditionierung) und das cg-Verfahren (mit und ohne Vorkonditionierung) benötigen, um den Fehler (gemessen in der $A$-Norm) um den Faktor $10^5$ zu reduzieren?

**Programmieraufgabe 11:** Programmieren Sie die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix $A$.

Testen Sie Ihre Funktion anhand von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und stellen Sie die ersten 50 Iterierten graphisch dar.

Hinweis: Besonders anschaulich wird die graphische Darstellung, wenn die Iterierten in ein Höhenprofil von der (zu minierenden) Funktion $f$ eingezeichnet werden. Das geht zum Beispiel mit

```
hold on;
[x1,x2] = meshgrid(-20:1:20,-20:1:20);
contour(x1,x2,x1.^2 + 20*x2.^2,[0:1:400].^2);
plot(hier sollten die Iterierten stehen,'-*','Linewidth',2)
hold off;
```

**Programmieraufgabe 12:** Programmieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix $A$.

Testen Sie Ihre Funktion anhand der Matrix aus PA11 und stellen Sie wieder die Iterierten graphisch dar. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus PA11. Testen Sie Ihre Funktion dann anhand der Matrix generiert durch

```
function A = MatrixGenerator(N)
A = -4*diag(ones(N^2,1)) - diag(ones(N*(N-1),1),N) - diag(ones(N*(N-1),1),-N);
for i=0:N-1
   for j=1:N-1
      A(j+i*N,j+1+i*N) = -1;
      A(j+1+i*N,j+i*N) = -1;
   end
end
```

mit $N = 4, 20, 40$.

**Besprechung in den Übungen am 19.06.2015.**