

7. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 16: (Frobenius-Norm)

Zeigen Sie, dass $\|A\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}$ eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen definiert, für die $\|A\|_F^2 = \text{spur}(A^T A)$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass es kein Norm $\|\cdot\|$ auf dem n -dimensionalen Raum gibt mit

$$\|A\|_F = \max_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Aufgabe 17: (Eigenschaften der Singulärwertzerlegung)

Sei $U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$, wobei $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T,$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1,$$

$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

wobei $\|A\|_F$ die Frobeniusnorm aus Aufgabe 22 bezeichnet. Folgern Sie daraus:

$$\text{Rang } A = r,$$

$$\text{Ker } A = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle,$$

$$\text{Im } A = \langle u_1, \dots, u_r \rangle.$$

Aufgabe 18: (Waidmanns Heil)

Führen Sie die in der Vorlesung beschriebene "Zickzackjagd nach Nichtnullelementen" durch für

$$BQ^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Programmieraufgabe 10: Sei eine $m \times n$ Matrix A und deren Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Σ_r nicht singulär, gegeben.

Überlegen Sie sich, dass die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 = \min, \quad \|x\|_2 = \min \quad (1)$$

durch

$$x = A^+b, \quad A^+ = V\Sigma^+U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gegeben ist.

Schreiben Sie dann ein Matlab-Programm, welches das Problem (1) auf die genannte Weise löst.

Hinweis: Wenn sie in der Matlab-Hilfe nach 'svd' (wie 'singular value decomposition') suchen, brauchen Sie die Singulärwertzerlegung nicht selbst zu programmieren.