Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.05.2015

6. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 13: (Francis QR-Schritt)

Beim in der Vorlesung vorgestellen Algorithmus zur Berechnung komplexer Eigenwerte von reellen Matrizen benötigt man die erste Spalte der Matrix M_k.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der $M_k e_1$ in möglichst wenigen Operationen berechnet.

b) Geben Sie dann einen Algorithmus an, der möglichst effizient die Spiegelung $Q(M_k e_1) = \alpha e_1$ mit einer Householder-Matrix Q berechnet.

Aufgabe 14: (Rechnen mit Hessenberg)

a) Transformieren Sie die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
durch eine Householder-Transformation auf Hessenbergform.

b) Seien
$$A = \begin{pmatrix} 12 & -2 & 9 \\ -6 & 0 & -3 \\ 7 & -7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
mit $Q^T Q = I$ und $Q^T A Q = H$ von Hessenbergform. Berechnen Sie H und Q.

Aufgabe 15: (Berechnung von Eigenvektoren)

Wie lassen sich die Eigenvektoren einer oberen Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen berechnen? Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an. Skizzieren Sie grob, wie daraus sämtliche Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Matrix A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten berechnet werden können.

Programmieraufgabe 9: Verwenden Sie Ihren Code aus Teil PA8 (oder entsprechende Matlab-Funktionen) um den QR-Algorithmus mit Shift für Tridiagonalmatrizen zu implementieren. Verwenden Sie dazu einmal den Shift wie in der Vorlesung und einmal den sogenannten *Wilkinson-Shift*:

$$\mu = h_{n,n} + d - \operatorname{sign}(d)\sqrt{d^2 + h_{n-1,n}^2}$$

mit $d = (h_{n-1,n-1} - h_{n,n})/2$ und $\operatorname{sign}(0) \in \{1, -1\}$ (μ ist der Eigenwert der unteren rechten 2×2-Untermatrix von H, der näher an $h_{n,n}$ liegt).

Testen Sie Ihr Programm an $A = \operatorname{tridiag}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n = 20$. Stellen Sie die Konvergenz des ersten berechneten Eigenwertes dar, indem Sie den exakten Fehler in jedem QR-Schritt berechnen und diesen graphisch gegen die Iterationszahl auftragen.

Hinweis: Die exakten Eigenwerte von A sind $\lambda_j = 2\cos\frac{j\pi}{n+1} - 2$, $j = 1, \ldots, n$.

Besprechung in den Übungen am 05.06.2015.
Wir wünschen allen Teilnehmern eine schöne und erholsame freie Woche.