

5. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 10: (Satz von Gerschgorin)

a) Zeigen Sie: Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $Ax = \lambda x$ komponentenweise.

b) Zeichnen Sie alle Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Menge der möglichen Eigenwerte weiter einschränken können.

Aufgabe 11: (Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)

Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix, genauer:

$$QR = (QD)(D^{-1}R),$$

wobei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $|d_i| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 12: Geben Sie einen Algorithmus an, der die QR-Zerlegung einer symmetrischen Tridiagonalmatrix der Dimension n mit einem Aufwand $O(n)$ berechnet.

Programmieraufgabe 8: Programmieren Sie den Algorithmus aus Aufgabe 12.

Besprechung in den Übungen am 22.05.2015.