

## 5. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

### Aufgabe 10: (Satz von Gerschgorin)

a) Zeigen Sie: Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{i,j})$ .

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung  $Ax = \lambda x$  komponentenweise.

b) Zeichnen Sie alle Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Menge der möglichen Eigenwerte weiter einschränken können.

### Aufgabe 11: (Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)

Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix, genauer:

$$QR = (QD)(D^{-1}R),$$

wobei  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ,  $|d_i| = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Aufgabe 12: Geben Sie einen Algorithmus an, der die QR-Zerlegung einer symmetrischen Tridiagonalmatrix der Dimension  $n$  mit einem Aufwand  $O(n)$  berechnet.

**Programmieraufgabe 8:** Programmieren Sie den Algorithmus aus Aufgabe 12.

Besprechung in den Übungen am 22.05.2015.