Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 06.05.2015

4. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 8: (Kondition)

Sei λ eine einfache Nullstelle des charakterisitischen Polynoms von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl des Eigenwerts λ von A existiert (d.h. $u^*v \neq 0$) und invariant ist unter unitären Ähnlichkeitstransformationen ist (d.h., dass der Eigenwert λ der Matrix U^*AU mit unitärer Matrix U dieselbe Konditionszahl hat).

Aufgabe 9: (KonditionII)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ und Links-Eigenvektoren $u_1^*, \dots, u_n^*$. Sei weiters $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig.

Zeigen Sie: Die Matrix $A + \varepsilon C$ hat die Eigenvektoren

$$v_j(\varepsilon) = v_j + \varepsilon \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{u_i^* C v_j}{u_i^* v_i} v_i + O(\varepsilon^2)$$

Hinweis: Drücken Sie $v_j'(0)$ als Linearkombination der v_i aus. Benützen Sie zur Bestimmung der Koeffizienten von v_i ($i \neq j$), dass $u_i^* v_j = 0$ für $i \neq j$ (warum?). Betrachten Sie ein geeignet skaliertes $v_j(\varepsilon)$, um auch den Koeffizienten von v_j wie behauptet zu bekommen.

Programmieraufgabe 6: Programmieren Sie die direkte Potenzmethode. Plotten Sie den Fehler für die folgendendermaßen definierten Testmatrizen:

```
n = length(d);
S = triu(diag(n:-1:1,0) + ones(n,n));
A = S*diag(d,0)*inv(S);
```

und

```
n = length(d);
z = diag(sqrt(1:n),0) + ones(n,n);
[Q R] = qr(z);
B = Q*diag(d,0)*Q';
```

mit

1. `d = (1:10)';`
2. `d = [ones(9,1); 2];`
3. `d = 1-2.^(-(1:0.5:5));`

Programmieraufgabe 7: Programmieren Sie die inverse Potenzmethode. Plotten Sie den Fehler für die Testmatrizen aus PA6.

Besprechung in den Übungen am 15.05.2015.