Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 29.04.2015

3. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 6: Sei f stetig und 2π-periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel lautet

$$\widetilde{\widehat{f}}_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-int_j} \qquad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie die Aliasing-Formel

$$\widetilde{\widehat{f}}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \widehat{f}(n+lN).$$

Aufgabe 7: Für gegebenes $\alpha > 0$ sei u_α die Lösung des Minimierungsproblems (R) aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\alpha \mapsto \|a * u_\alpha - b\|_{L^2}$ für $\alpha > 0$ monoton wächst wohingegen $\alpha \mapsto \|u_\alpha^{(p)}\|_{L^2}$ monoton fällt.

Programmieraufgabe 4: Verwenden Sie Ihren Code aus PA1 (oder die Matlab-Funktionen `fft` und `ifft`) um eine Funktion `interpolation(f,t,N)` zu implementieren, die für eine Zweierpotenz N die trigonometrische Interpolation f_N einer Funktion f in $t \in \mathbb{R}$ auswertet. Zeichnen Sie hiermit verschiedene Interpolationen der Funktionen g und h aus Aufgabe 3 (s. Blatt 1).

Programmieraufgabe 5: Verwenden Sie Ihren Code aus Teil PA1 (oder die Matlab-Funktionen `fft` und `ifft`) um ein Programm zu schreiben, welches zu vorgegebenen Daten eine normalverteilte Störung addiert und diese Daten dann glättet. Stellen Sie die Daten, die gestörten Daten und die geglätteten Daten graphisch dar. Als Alternative können Sie das nachfolgendes `Matlab`-Programm verwenden:

```
N=256;
x=(2*pi/N)*[0:N-1]';
f=sin(x)+0.2*sin(3*x)-0.2*cos(6*x);

e=0.1*randn(N,1);

b=f+e;

bb=fft(b);
n=[0:N/2-1 -N/2:-1]';
alpha=0.0001;
uu=bb./(1+alpha*n.^4);
u=ifft(uu);
plot(x,[real(u),f,b]);
delta=norm(e)/sqrt(N)
d=norm(u-b)/sqrt(N)
```

Testen Sie das/Ihr Programm für mehrere Werte von α. Modifizieren Sie das/Ihr Programm so, dass es zusätzlich eine geglättete Ableitung der Funktion berechnet und geben Sie das Ergebnis aus.

Besprechung in den Übungen am 08.05.2015.