Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 22.04.2015

2. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 4:

(a) Sei $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ (also x_j *reell*). Zeigen Sie für die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{x}$ von x

$$\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k} \qquad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die (diskrete) Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.
Falls x ungerade ist (d.h. $x_{-k} = -x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ ungerade.

Aufgabe 5: Gegeben sei eine zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ddots & \ddots & a_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Die Eigenwerte von A sind die Fourier-Koeffizienten $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1}$ (mit $\hat{a}_k = (\mathcal{F}_N a)_k$) und die Eigenvektoren sind die Spalten der Fourier-Matrix $\mathcal{F}_N = (w_N^{jk})_{j,k=0}^{N-1}$. Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an.
Hinweis: Diagonalisieren Sie A und nehmen Sie an, dass A invertierbar ist, womit dann die Eigenwerte von 0 verschieden sind.

Programmieraufgabe 2: Verwenden Sie Ihren Code aus PA1 (oder die Matlab-Funktionen `fft` und `ifft`) um den schnellen LGS-Löser für zyklische Matrizen aus Aufgabe 5 zu implementieren.

Programmieraufgabe 3: Die zweidimensionale diskrete Fouriertransformation $\mathcal{F}(X) = \hat{X}$ von $X = (x_{m,n}) \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ist durch

$$\hat{x}_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} w_M^{mk} w_N^{nl}$$

und die Faltung $X * Y \in \mathbb{C}^{M \times N}$ durch

$$(X * Y)_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} y_{k-m,l-n}$$

$(k = 0, \ldots, M-1,\ l = 0, \ldots, N-1,)$ gegeben. Wie im eindimensionalem Fall gilt

$$X * Y = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(X) \cdot \mathcal{F}(Y)\big),$$

wobei die Multiplikation auf der rechten Seite wiederum komponentenweise zu verstehen ist und

$$\mathcal{F}^{-1}(X) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} w_M^{-mk} w_N^{-nl}$$

gilt. Realisieren Sie die zweidimensionale FFT, indem Sie Ihren Code aus PA1 (oder die Matlab-Funktionen `fft` bzw. `ifft`) zunächst auf die Zeilen und dann auf die Spalten von X anwenden und berechnen Sie effizient die Faltung der Matrix `double(imread('Ausgangsmatrix.jpg'))` und der Matrix, welche in der Datei `Faltungsmatrix.asc` gespeichert ist. Das Ergebnis C läßt sich mit dem Befehl `imwrite(C/255,'Ergebnismatrix.jpg');` wieder als Bilddatei speichern. Die Bilddatei und die Faltungsmatrix finden Sie auf der Übungshomepage.

wichtiger Hinweis: Die in Matlab eingebauten Funktionen `fft` und `ifft` weichen etwas von der in der Vorlesung verwendeten Konvention ab. Informieren Sie sich hierüber vor Verwendung der eingebauten Funktionen in der ausführlichen Product-Help!

Besprechung in den Übungen am Ausweichtermin des 01.05.2015.