Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 15.04.2015

1. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 1: (Sinus-/Cosinusreihe)

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer stetigen, 2π-periodischen Funktion, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

erlaubt. Geben Sie a_n, b_n als Funktion der c_n an. Wie lassen sich a_n und b_n aus $f(t)$ berechnen? Was ergibt sich für gerade und ungerade Funktionen ($f(t) = f(-t)$ bzw. $f(t) = -f(-t)$)?

Aufgabe 2: (Fourierreihen)

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ g(t) = t$$

mit 2π-periodischer Fortsetzung. Konvergiert die Reihe gleichmäßig?

b) Führen Sie die gleichen Untersuchungen an der Funktion

$$h : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ h(t) = |t|$$

mit 2π-periodischer Fortsetzung durch.

Aufgabe 3: (Cesàro-Summen)

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die *Cesàro-Summe*

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie: Aus der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein a folgt Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert aber nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Programmieraufgabe 1: Implementieren Sie die schnelle Fourier-Transformation (ohne Verwendung von `fft` und `ifft`). Sie dürfen annehmen, dass die Länge des Eingabevektors eine Zweierpotenz ist.
Hinweis: Implementieren Sie die schnelle Fourier-Transformation rekursiv (d.h. Ihre Funktion ruft sich selbst wieder auf).

Zusatzaufgabe: (Terminproblem)

Sprechen Sie mit Ihrem Tutor einen Ausweichtermin für die Übung am 01.05. ab.
Hinweis: Für diese Aufgabe können leider keine Kreuze vergeben werden.

Besprechung in den Übungen am 24.04.2015.