

10. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 33: (Abbruch bei Arnoldi)

Das Arnoldi-Verfahren werde auf $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ angewendet. Zeigen Sie:

- (a) Ist $h_{k+1,k} = 0$, so ist der k -te Krylov-Raum K_k ein A -invarianter Unterraum von \mathbb{R}^n , d.h. $AK_k \subseteq K_k$, und es gilt $K_k = K_{k+1} = \dots = K_N$.
- (b) Ist k der Grad des Minimalpolynoms von A , so gibt es ein $j \leq k$, so dass $h_{j+1,j} = 0$.

Aufgabe 34: (Matrix-Rang bei Arnoldi)

Zeigen Sie, dass die Matrix \tilde{H}_k aus dem Arnoldi-Verfahren vollen Rang hat und dass lineare Ausgleichsprobleme mit dieser Matrix lösbar sind.

Aufgabe 35: (Orthogonale Transformationen bei Arnoldi)

Zur (näherungsweise) Lösung von $Ax = b$ mit einer nicht singulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird das GMRES bzw. das FOM-Verfahren verwendet. Dabei sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ die Arnoldi-Basis zum Startvektor b .

Weiter seien $\hat{A} = QAQ^T$ und $\hat{b} = Qb$ mit einer orthogonalen Matrix Q . Das GMRES bzw. das FOM-Verfahren wird auch zur Lösung von $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ verwendet. Zeigen Sie:

- (a) Für die Vektoren $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ der neuen Arnoldi-Basis gilt $\hat{v}_j = Qv_j$.
- (b) Zeigen Sie damit, dass GMRES und FOM für das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ die Lösung $\hat{x}_k = Qx_k$ liefern.

Aufgabe 36: (Invarianz unter Shifts)

Zeigen Sie: Das Lanczos- und das Arnoldi-Verfahren sind invariant unter Shifts, d.h., wenn man A durch $A + \lambda I$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt, bleiben die Krylov-Basen V_k und beim Lanczos-Verfahren W_k unverändert.

Wie ändern sich die Hessenbergmatrizen H_k bzw. T_k ?