

## 10. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

### Aufgabe 33: (Abbruch bei Arnoldi)

Das Arnoldi-Verfahren werde auf  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  angewendet. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $h_{k+1,k} = 0$ , so ist der  $k$ -te Krylov-Raum  $K_k$  ein  $A$ -invarianter Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $AK_k \subseteq K_k$ , und es gilt  $K_k = K_{k+1} = \dots = K_N$ .
- (b) Ist  $k$  der Grad des Minimalpolynoms von  $A$ , so gibt es ein  $j \leq k$ , so dass  $h_{j+1,j} = 0$ .

### Aufgabe 34: (Matrix-Rang bei Arnoldi)

Zeigen Sie, dass die Matrix  $\tilde{H}_k$  aus dem Arnoldi-Verfahren vollen Rang hat und dass lineare Ausgleichsprobleme mit dieser Matrix lösbar sind.

### Aufgabe 35: (Orthogonale Transformationen bei Arnoldi)

Zur (näherungsweise) Lösung von  $Ax = b$  mit einer nicht singulären Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wird das GMRES bzw. das FOM-Verfahren verwendet. Dabei sei  $\{v_1, \dots, v_k\}$  die Arnoldi-Basis zum Startvektor  $b$ .

Weiter seien  $\hat{A} = QAQ^T$  und  $\hat{b} = Qb$  mit einer orthogonalen Matrix  $Q$ . Das GMRES bzw. das FOM-Verfahren wird auch zur Lösung von  $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$  verwendet. Zeigen Sie:

- (a) Für die Vektoren  $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$  der neuen Arnoldi-Basis gilt  $\hat{v}_j = Qv_j$ .
- (b) Zeigen Sie damit, dass GMRES und FOM für das transformierte Problem  $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$  die Lösung  $\hat{x}_k = Qx_k$  liefern.

### Aufgabe 36: (Invarianz unter Shifts)

Zeigen Sie: Das Lanczos- und das Arnoldi-Verfahren sind invariant unter Shifts, d.h., wenn man  $A$  durch  $A + \lambda I$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  ersetzt, bleiben die Krylov-Basen  $V_k$  und beim Lanczos-Verfahren  $W_k$  unverändert.

Wie ändern sich die Hessenbergmatrizen  $H_k$  bzw.  $T_k$ ?