Universität Tübingen
Mathematisches Institut
D. Mansour, J. Seyrich

Tübingen, den 12.06.2013

8. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 25: (Methode des steilsten Abstiegs)

Wie kann die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A benutzt werden?

Zeigen Sie: In der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T Av}$ gilt für den Fehler der Iterierten

$$\|x_k - x\|_A \leq \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\Big)^{k/2} \|x_0 - x\|_A.$$

($\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$.) Das Verfahren konvergiert also (aber sehr langsam, falls A schlecht konditioniert ist).

Hinweis: Verwenden Sie (zum Beispiel) das folgende Grundgerüst

$$\begin{aligned}\|x_k - x\|_A^2 &= \ldots = d_k^T A^{-1} d_k = \ldots = d_k^T A^{-1} d_{k-1} = \ldots \\ &= d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1}\Big(1 - \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1}}\Big) \leq \ldots = \|x_{k-1} - x\|_A^2 \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\Big).\end{aligned}$$

Aufgabe 26: (Orthogonalität und Skalarprodukte)

Zeigen Sie:

(a) Bzgl. des Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ sind in der Methode des steilsten Abstiegs zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen und im cg-Verfahren die Gradienten g_k zueinander orthogonal. (Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass im cg-Verfahren Suchrichtungen d_k zueinander A-orthogonal sind.)

(b) Im cg-Verfahren ist

$$\frac{(d_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(g_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)}, \qquad \frac{(Ad_k, g_{k+1})}{(Ad_k, d_k)} = -\frac{(g_{k+1}, g_{k+1})}{(g_k, g_k)}.$$

Aufgabe 27: (Orthogonale Zerlegung)

Seien $V \leq W \leq \mathbb{R}^n$ und $V^\perp = \{w \in W : w^T Av = 0 \text{ für alle } v \in V\}$ der zu V konjugierte Unterraum von W ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit). Dann existieren zu $w \in W$ eindeutig bestimmte $v \in V$ und $d \in V^\perp$ mit

$$w = v + d.$$

Dabei ist $v = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(Ad_j, w)}{(Ad_j, d_j)} d_j$, falls $d_0, \ldots, d_{k-1}$ eine A-orthogonale Basis von V ist (d.h. $(Ad_i, d_j) = 0$ für $i \neq j$).

Aufgabe 28: (Matrix-Polynom)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie für jedes (relle) Polynom q

$$\|q(A)\|_A = \max_{\lambda \text{ Eigenwert von } A} |q(\lambda)|,$$

wobei $\|\cdot\|_A$ definiert ist wie in der Vorlesung und in Aufgabe 25.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 19.06.2013.