

7. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 23: (Eigenschaften der Singulärwertzerlegung)

Sei $U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$, wobei $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T,$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1,$$

$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

wobei $\|A\|_F$ die Frobeniusnorm aus Aufgabe 22 bezeichnet. Folgern Sie daraus:

$$\text{Rang } A = r,$$

$$\text{Ker } A = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle,$$

$$\text{Im } A = \langle u_1, \dots, u_r \rangle.$$

Aufgabe 24: (Waidmanns Heil)

Führen Sie die in der Vorlesung beschriebene "Zickzackjagd nach Nichtnullelementen" durch für

$$BQ^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$