Universität Tübingen
Mathematisches Institut
D. Mansour, J. Seyrich

Tübingen, den 29.05.2013

6. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 19: (Francis QR-Schritt)

Beim in der Vorlesung vorgestellen Algorithmus zur Berechnung komplexer Eigenwerte von reellen Matrizen benötigt man die erste Spalte der Matrix M_k.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der $M_k e_1$ in möglichst wenigen Operationen berechnet.

b) Geben Sie dann einen Algorithmus an, der möglichst effizient die Spiegelung $Q(M_k e_1) = \alpha e_1$ mit einer Householder-Matrix Q berechnet.

Aufgabe 20: (Rechnen mit Hessenberg)

a) Transformieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

durch eine Householder-Transformation auf Hessenbergform.

b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -2 & 9 \\ -6 & 0 & -3 \\ 7 & -7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

mit $Q^T Q = I$ und $Q^T A Q = H$ von Hessenbergform. Berechnen Sie H und Q.

Aufgabe 21: (Berechnung von Eigenvektoren)

Wie lassen sich die Eigenvektoren einer oberen Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen berechnen? Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an. Skizzieren Sie grob, wie daraus sämtliche Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Matrix A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten berechnet werden können.

Aufgabe 22: (Frobenius-Norm)

Zeigen Sie, dass $\|A\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}$ eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen definiert, für die $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A)$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass es kein Norm $\|.\|$ auf dem n-dimensionalen Raum gibt mit

$$\|A\|_F = \max_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 05.06.2013.