Universität Tübingen
Mathematisches Institut
D. Mansour, J. Seyrich

Tübingen, den 15.05.2013

5. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 15: (Satz von Gerschgorin)

a) Zeigen Sie: Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu - a_{i,i}| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{i,k}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $Ax = \lambda x$ komponentenweise.

b) Zeichnen Sie alle Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Menge der möglichen Eigenwerte weiter einschränken können.

Aufgabe 16: (Wiederholung, QR-Zerlegung)

Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix, genauer:

$$QR = (QD)(D^{-1}R),$$

wobei $D = diag(d_1, \dots, d_n)$, $|d_i| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 17: (Strukturerhaltung beim QR-Algorithmus)

a) Zeigen Sie: Ist H tridiagonal und symmetrisch und $H = QR$ eine QR-Zerlegung von H, so ist auch $\widetilde{H} = RQ$ tridiagonal und symmetrisch und lässt sich aus H in $O(n)$ Operationen berechnen.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der die QR-Zerlegung einer symmetrischen Tridiagonalmatrix der Dimension n mit einem Aufwand $O(n)$ berechnet.

Aufgabe 18: (Auf den Spuren von Google)

Was Google ausmacht, ist ein Algorithmus, der eine geeignete Reihenfolge der Suchergebnisse liefert, der sog. Page-Rank-Algorithmus, bei welchem es darum geht, die Wichtigkeit von Webseiten zu charakterisieren.
Google bestimmt die Wichtigkeit $r(P)$ einer Seite P mittels der Gleichung

$$r(P) = \sum_{Q \in B_p} \frac{r(Q)}{|Q|}, \tag{1}$$

wobei $B_p = \{$alle Seiten, die auf P verweisen $\}$ und $|Q|$ die Gesamtanzahl der Verweise von Q (egal auf welche Seite) sind.

Definieren wir

$$y = \begin{pmatrix} r(P_1) \\ \vdots \\ r(P_n) \end{pmatrix},$$

wobei n die Anzahl aller Seiten ist, so entspricht die komponentenweise Gleichung (1) der Gleichung

$$y = Ay, \tag{2}$$

mit $A = (a_{ij})$, definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|P_j|}, & \text{falls } P_j \text{ verweist auf } P_i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn 1 der größte Eigenwert von A ist, kann man Gleichung (2) iterativ (also durch den Ansatz $y_{k+1} = Ay_k$) lösen. Zeigen Sie, dass tatsächlich 1 ein Eigenwert ist und dass alle anderen Eigenwerte betragsmäßig durch 1 beschränkt sind.

Hinweis: Die Spaltensumme von A ist für jede Spalte 1?

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 29.05.2013.
Wir wünschen allen erholsame Ferien!