Universität Tübingen
Mathematisches Institut
D. Mansour, J. Seyrich Tübingen, den 24.04.2013

2. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_N$ aus der Vorlesung eine lineare Abbildung ist, deren Inverse durch $\mathcal{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}_N}$ gegeben ist. Geben Sie die zugehörigen Matrizen der Abbildungen $\mathcal{F}_N$ und $\mathcal{F}_N^{-1}$ an.

(b) Zeigen Sie die diskreten Analoga zu Parsevalgleichung und Faltungssatz (also $\|\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{F}_N x\|_2 = \|x\|_2$ und $\mathcal{F}_N(x * y) = \mathcal{F}_N(x) \cdot \mathcal{F}_N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^N$).

Aufgabe 6:

(a) Sei $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ (also x_j *reell*). Zeigen Sie für die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{x}$ von x

$$\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k} \qquad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die (diskrete) Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.
Falls x ungerade ist (d.h. $x_{-k} = -x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ ungerade.

Aufgabe 7: Sei f stetig und 2π-periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel lautet

$$\widetilde{\widehat{f}}_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-int_j} \qquad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie die Aliasing-Formel

$$\widetilde{\widehat{f}}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \widehat{f}(n + lN).$$

Aufgabe 8: Gegeben sei eine zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ddots & \ddots & a_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Die Eigenwerte von A sind die Fourier-Koeffizienten $\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_{N-1}$ (mit $\hat{a}_k = (\mathcal{F}_N a)_k$) und die Eigenvektoren sind die Spalten der Fourier-Matrix $\mathcal{F}_N = (w_N^{jk})_{j,k=0}^{N-1}$. Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 01.05.2013 (bzw. entsprechender Ausweichtermin).