

## 1. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

### Aufgabe 1: (Sinus-/Cosinusreihe)

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktion,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$  die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

erlaubt. Geben Sie  $a_n, b_n$  als Funktion der  $c_n$  an. Wie lassen sich  $a_n$  und  $b_n$  aus  $f(t)$  berechnen? Was ergibt sich für gerade und ungerade Funktionen ( $f(t) = f(-t)$  bzw.  $f(t) = -f(-t)$ )?

### Aufgabe 2: (Fourierreihen)

- a) Bestimmen Sie (gerne unter der Verwendung von Aufgabe 1) die Fourierreihe der Funktion

$$g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = t$$

mit  $2\pi$ -periodischer Fortsetzung. Konvergiert die Reihe gleichmäßig?

- b) Führen Sie die gleichen Untersuchungen an der Funktion

$$h : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = |t|$$

mit  $2\pi$ -periodischer Fortsetzung durch.

### Aufgabe 3: (Cesàro-Summen)

Für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir die *Cesàro-Summe*

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie: Aus der Konvergenz der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ein  $a$  folgt Konvergenz der Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ , Konvergenz der Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  impliziert aber nicht die Konvergenz von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Aufgabe 4: (Approximationssatz von Weierstraß)

Zeigen Sie mit dem Satz von Fejér, dass jede stetige Funktion  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Hinweis: Führen Sie den Variablenwechsel  $x = \cos(t)$  durch und setzen Sie  $f(t) := g(\cos(t)) = g(x)$  gerade und periodisch fort, d.h.  $f(-t) = f(t) = f(t + 2\pi)$ .

### Zusatzaufgabe: (Terminproblem)

Sprechen Sie mit dem Tutor einen Ausweichtermin für die Übung am 01.05. ab.

Hinweis: Für diese Aufgabe können leider keine Kreuze vergeben werden.

**Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 24.04.2013.**