

Musterlösung Aufgabe 17 b)

Wir suchen eine orthogonale symmetrische (Householder-)Matrix $Q = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, sodass mit einer oberen Dreiecksmatrix R gilt

$$A = QR$$

- Erster Schritt:

Dazu suchen wir zunächst eine Matrix $Q_1 = I - 2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T$, sodass

$$\begin{aligned}Q_1 a_1 &= \alpha_1 \hat{e}_1 \\ \alpha_1 &= -\operatorname{sgn}(a_{11})\|a_1\|_2\end{aligned}$$

In Numerik I wurde gezeigt, dass

$$\mathbf{u}_1 = \frac{a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1}{\sqrt{2\alpha_1(\alpha_1 - a_{11})}}.$$

Wir wollen nun in unserem Fall in $\mathcal{O}(1)$

$$Q_1 A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & \tilde{A}_1 \end{pmatrix}$$

berechnen.

Aus Speichergründen berechnen wir dabei natürlich keine neue Matrix. Auch die Matrix Q_1 wird nicht gespeichert. Stattdessen überschreibt man die erste Spalte von A mit dem Vektor $\mathbf{u}_1$, den einzigen in der ersten Spalte von A verbleibenden Eintrag α_1 speichert man wie alle anderen Diagonalelemente der Matrix R in einem Extravektor *diags*.

Konkret führen wir folgende Schritte durch (wobei wir ausnutzen, dass A tridiagonal ist):

1. Berechne

$$\alpha_1 = -\operatorname{sgn}(a_{11})\|a_1\|_2 \quad \underbrace{=}_{A \text{ tridiagonal}} \quad -\operatorname{sgn}(a_{11})\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$$

2. Berechne

$$u = \frac{\|a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1\|_2^2}{2} = \alpha_1(\alpha_1 - a_{11})$$

3. Benutze als Speichervariablen

$$\begin{aligned}u_1 &= a_{11} - \alpha_1 \\ u_2 &= a_{21}\end{aligned}$$

und setze dann

$$\text{diags}_1 = \alpha_1.$$

Nun muss noch $Q_1 a_i$ für $i \neq 1$ berechnet werden. Da unsere Matrix A tridiagonal ist, ist aber $\mathbf{u}_1^T a_i = 0$ für $i > 3$, weshalb wir nur noch

$$a_{2.neu} = Q_1 a_2$$

$$a_{3.neu} = Q_1 a_3$$

berechnen müssen. Dazu führen wir die folgenden Schritte durch:

4. Setze

$$tmp = \frac{u_1 a_{12} + u_2 a_{22}}{u} \leftarrow \text{(das entspricht } 2\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T a_2)$$

Setze dann

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{12} - tmp \cdot \underbrace{u_1}_{\substack{\text{1. Komp. von } a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1}} \\ a_{22} &= a_{22} - tmp \cdot \underbrace{u_2}_{\substack{\text{2. Komp. von } a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1}} \end{aligned}$$

Alle anderen Einträge der 2. Spalte von A bleiben unverändert, da $a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1$ nur Einträge in den ersten beiden Komponenten hat

5. Setze

$$tmp = \frac{u_2 a_{23}}{u} \leftarrow \text{(das entspricht } 2\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T a_3)$$

Setze dann

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{13} - tmp \cdot \underbrace{u_1}_{\substack{\text{1. Komp. von } a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1}} \\ a_{23} &= a_{23} - tmp \cdot \underbrace{u_2}_{\substack{\text{2. Komp. von } a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1}} \end{aligned}$$

Alle anderen Einträge der 3. Spalte von A bleiben unverändert, da $a_1 - \alpha_1 \hat{e}_1$ nur Einträge in den ersten beiden Komponenten hat.

6. Jetzt haben wir die Matrix A ohne Informationsverlust mit der Matrix A_1 überschrieben – ohne Informationsverlust, weil wir das einzige Nicht-Null-Element der ersten Spalte im Vektor *diags* gespeichert haben. Den frei gewordenen Speicherplatz in der ersten Spalten von A verwenden wir, um dort den Vektor $\mathbf{u}_1$ zu speichern. Dabei müssen wir wegen der speziellen Form von $\mathbf{u}_1$ nur die ersten beiden Einträge der ersten Spalte von A überschreiben. Die anderen Einträge bleiben 0.

$$u = \sqrt{2u},$$

$$a_{11} = \frac{u_1}{u}$$

$$a_{21} = \frac{u_2}{u}.$$

Wir sehen am letzten Schritt, dass die resultierende Matrix nicht mehr symmetrisch ist, der Eintrag a_{13} , welcher vorher 0 war, wird jetzt aufgefüllt. Wir sehen aber auch, dass wir $Q_1 A$ in $\mathcal{O}(1)$ Schritten berechnet haben.

- Folgerung:

Als nächstes müssen wir eine $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix Q_2 finden, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix},$$

Dann eine $(n-2) \times (n-2)$ -Matrix Q_3 , mit... Wir sehen aber, dass dies jeweils völlig analog zu $Q_1 A$ durchgeführt werden kann. Aufpassen müssen wir nur bei der Berechnung von $Q_{n-1} A_{n-2}$, da wir dort nur $Q_{n-1} a_{n-1}$ und $Q_{n-1} a_n$, nicht aber $Q_{n-1} a_{n+1}$ berechnen müssen.