

Musterlösung Aufgabe 13 a)

Seien u und v der links- bzw. rechtsseitige Eigenvektor von A zum einfachen Eigenwert λ , so sind die zugehörigen Eigenvektoren der unitär ähnlichen Matrix offensichtlich

$$\begin{aligned}\tilde{u}^* &= u^* U^*, \\ \tilde{v} &= Uv.\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\tilde{u}^* \tilde{v} = u^* U^* U v = u^* v.$$

Um zu sehen, dass die Konditionszahl nicht verschwindet, verwendet man, dass man A mit unitären Transformationen auf obere Dreiecksform bringen kann, wie im Satz über die Schur'sche Normalform aus der Vorlesung bekannt. Dabei kann man die unitäre Transformation so wählen, dass der Eigenwert λ zur betrachteten Konditionszahl ganz oben auf der Diagonalen steht. Daraus folgt sofort, dass e_1 ein Rechtseigenvektor ist. Es ist also nur noch zu zeigen, dass der zugehörige Linkseigenvektor in der ersten Komponente nicht 0 sein kann:

Die entsprechende Eigenwertgleichung lautet:

$$u^* \begin{pmatrix} \lambda & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda u^*. \quad (1)$$

Angenommen, der erste Eintrag von u wäre 0, also $u = (0 \quad \tilde{u})^T$ dann würde sich Gleichung (1) zu

$$\tilde{u}^* \begin{pmatrix} \lambda_2 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_3 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda \tilde{u}^*$$

vereinfachen, was aber ein Widerspruch ist, da laut der rechten Seite λ ein Eigenwert ist, nach der linken Seite (wo die Eigenwerte auf der Diagonalen der Matrix stehen) aber nicht.