Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 05.07.2011

12. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 35: Verstehen Sie einen Simplex-Schritt am Beispiel der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \min! \end{cases}$$

Dabei werde $x = (12, 0, 0)^T$ als Anfangsecke gewählt. Überlegen Sie sich dazu:

(a) Wie ändern sich die Kosten $x_1 + x_2 + x_3$ bei wachsender zweiten Komponente von x?
(b) Wie ändern sich die Kosten $x_1 + x_2 + x_3$ bei wachsender dritten Komponente von x?
(c) Welche Komponente von x wird im ersten Schritt des Simplex-Verfahrens erhöht und warum?
(d) Wie sieht dann die neue Ecke aus?
(e) Warum ist diese Ecke optimal?

Aufgabe 36: Bestimmen Sie eine Ecke für die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \min! \end{cases}$$

mit der "Phase I" des Simplex-Algorithmus.

Aufgabe 37: Betrachten Sie das Problem bzw. das zugehörige duale Problem

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \max! \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \\ b^T y = \min! \end{cases}$$

Leiten Sie die Optimalitätsbedingungen her.

Programmieraufgabe 15: Implementieren Sie den Simplexalgorithmus und testen Sie Ihr Programm an dem Beispiel von Klee und Minty mit $\sum_{i=1}^n 2^{n-i} x_i = \max!$ und

$$\sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \leq 5^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$x \geq 0$$

mit $n = 3, 4, 5$. Überführen Sie das Problem zuerst in Standardform. Starten Sie jeweils mit der Ecke $x = (b^T\, 0 \ldots 0)^T$, wobei $b = (5\, 5^2 \ldots 5^n)^T$. Plotten Sie die Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte. Wieviele Schritte benötigt das Verfahren für dieses Beispiel?

Besprechung in den Übungen am 12.07.2011
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 12.07.2011 per Email an die Adresse
`num2ub@na.uni-tuebingen.de`